目　　录

引　言

开展实用工作的地震学家需要全面掌握其性质随深度变化很大的介质中的波传播理论，于是，就能把震源设想为只作用于介质中的一点，而对震源进行合适的模拟。第一卷涉及了这些基础课题，并描述了如何用各种仪器采集地震数据。本卷以这些内容为基础，论述与过去十年中地震学的巨大进展相应的某些专门课题。

这里我们将从如何分析地震数据并对它们进行反演以取得模型参数的讨论开始。在第十一章(章序从第一卷的十章延续下来)，我们把地震数据看成是由信号和噪声组成的。信号是数据中可用于获取有关地球和震源的某些信息的那部分。我们对如何随着引入每一种新数据而做出发现作了历史的回顾后，又描述了改善数据质量即信噪比的各种方法。

第十二章论及地震学的最主要任务之一：对数据进行反演以确定地球内部的结构。我们先以走时数据为例，叙述了经典的 Herglotz-Wiechert 法，用该方法在 1910 年前证实了具有固态地幔和液态地核这样明显的地球结构。然后我们又介绍了 Gerver 和 Markushevitch(1966, 1967)把该方法推广到存在低速层的情况。

另一个已完全解决了的反演问题，是在垂直方向不均匀的介质中，利用垂直入射波的反射地震图作为数据。可以发现，阻抗为根据反射地震图求得的垂直向走时的函数，而地震波速则为根据走时数据求得的深度的函数。

对地震学中的任一反演问题，与对上述两个简化了的问题不同，精确的解是未知的。一般说来，可通过线性化-迭代过程获

取反演解：先有个初始模型，解该初始模型的正演问题；再借助于模型参数的扰动，构成初始模型的观测值和计算值之间残差的线性方程；接着解扰动的线性方程；修改初始模型，然后又重复整个过程。这种方法几乎可以用于任何地震数据，包括面波相速度和自由振荡周期。除了其它成果外，Backus 和 Gilbert(1967，1968，1970)引入分辨核的概念作为解的非唯一性的量度，做了令人鼓舞的工作。第十二章总结了根据远震走时数据测定大孔径台阵下岩石层的三维地震结构的线性反演方法。

二维和三维不均匀地球模型的地震图的计算方法正处于发展阶段。显然，这些方法不仅是应诸如自然资源勘探这样的实用目的之需，而且是应一些纯科学目的之需，诸如对地球中横向不均匀性引起的自由振荡谱峰值分裂的研究而产生的。即使在地球深部，与横向均匀性的分离也正成为一个关键问题。以体波 PKP 的 GH 分枝为例，这是 Bolt(1962，1964) 所提出的在内核-外核边界以上约 500 公里处地球液核里间断面所产生的一种分枝。另外几位地震学家发展了这种类型的地核模型来解释数据。但 Doornbos 和 Husebye(1972)在研究了观测到这些波扫过大孔径地震台阵时的速度后，对上述间断面是否存在提出了疑问。King 等(1974)提供了令人信服的证据，支持 Haddon(1972) 关于 GH 分枝产生于核幔边界附近横向不均匀性的理论。这里可清楚地看到把简单的一维结构强加于真实地球时会出现的问题，即这样可能导致错误的垂直结构。

第十三章描述了使地球模型中可能有二维和三维挠度的几次尝试，论及垂直向非均匀地球模型的初始模型，并将小扰动引入介质特性或内界面深度中，这样就自然地延展了前面的章节。我们按照不均匀性的范围和相对于波长的传播距离，把包括三维非均匀介质中震波散射在内的一些问题分类。问题的范围与可应用的方法如射线理论、扰动理论、有限差分法、有限元法和其它数字方法(见图 13.11)是一致的。对于不能采用确定方法的复杂

问题，则采用随机介质加以解决。

地震学中的模型基本上是数学模型。地震学所涉及的物理学是比较简单的，其中大部分包括在运动方程、Hooke 定理和其它几个结构关系式中。然而，以整齐的方式，把所观测的三个空间尺度中具有起伏的时间变化的复杂矢量——波现象简化为对波源和传播介质的描述，这对地震学家是个挑战性的问题，因而，有一个合适的地震波源模型是非常重要的。第十四章和第十五章分别是有关地震断层的运动学和动力学模型的。在运动学模型中，我们研究了远场和近场地震辐射和断层滑动函数间的关系。我们发现空间有限大小的震源的地震辐射实际上与点源的辐射不同，甚至对离该源距离很远的接收器也如此。在动力学模型中，可从构造应力的初始条件和断层带的内摩和内聚特性求得滑动函数。这些模型对研究震源机制和地球中目前的构造活动是很重要的，对预报活动断层的强地震运动的实际目的也很有用。

第十一章 地震数据分析

地震仪所作的地面运动记录，包含有关产生运动的震源特性和地震扰动在其中传播的介质的特性这两种信息。我们现在的问题是如何从观测记录中获取这些信息。第十二章的课题是用数据反演的方法求得震源和介质的特性．本章我们将讨论用于反演的数据的准备，目的是尽可能改进数据的质量，以便详细精确地了解地球内部的情况。

11.1 地震数据和有关发现

地震学家们收集的数据是相当不同的，因为(i)震源不同；(ii)震源大小、传播距离和接收台阵的尺度范围都很大；(iii)用地震波所作测量的类型不同。

天然地震波源包括地震、火山喷发、风、海浪和陨石撞击。最简单、最普通的人工震源是地下爆破，但其它能量源，如气枪、煤气爆炸、电火花和水压振动器变得日益普遍。这些震源提供了相当大的强度范围。最大地震的等效点力约为微震研究中观测到的最小地震的 10^{18}倍。用于产生地震波的炸药量从几克到百万吨以上(10^{12}倍)。地震台网的大小范围从探测工程建筑基岩的不到几百米到研究地震震源机制和地球内部构造的 10,000 公里以上(10^6倍)。地震信号的频率范围则从 0.0001 到 100 赫(10^6倍)。

由于信号频率、接收台网的尺度和震源大小都有相当宽的范围，因此有无数种待分析的数据组。

通过回顾新数据如何产生，又如何由此而作出地震学中的一些重大发现的历史，我们将分别详细阐述天然震源和人工震源地

震数据的内容。

11.1.1 天然震源

无论谁第一次看由地震学家们用 P, PP, PPP, PcP、S, SS, ScS 等符号标出的地震图都会奇怪，这些图是怎么识别的？即使地震仪器的奠基人对地震图的曲线也曾困惑不解。(见Dewey和Byerly于1969年所作的有关早期地震仪发明者的详细调查。) 1881年3月，在东京大学用水平摆得到第一张地方震地震图时，Ewing(1881)和Milne(1881)就对初始波组是压缩波还是剪切波的问题发生了分歧。但在以后的20年内，大多数人在识别 P 波、S 波和面波方面已取得一致意见(有一个重要的例外，如第一卷第一章所提及的)。1889年4月17日Rebeaur-Paschwitz在波茨坝第一次记录到了一个日本的远震。Oldham于1900年发表了第一条走时曲线。

经过Milne的努力，地震学委员会建立了最初的全球地震台网，该委员会是由英国科学进展学会于1896年组织的。国际地震学协会创立于1903年。当时，记录图和台站速报的质量已获改善，一些台站不仅报告到时，而且报告后来Gutenberg和Richter(1954)测定震级时所用的 P 波、S 波等的振幅。例如，早在1910年的地震，就有约30个台站速报的振幅数据可用。

1918年开始发表国际地震简报(ISS)。该简报包括世界范围各台站发出的数据，以及根据这些数据测定的发震时刻和震中。1951年报到ISS的台站数是602个，其中108个在日本，1975年约有850个台站发出报告。以后ISS由国际地震中心(ISC)的报告代替，该中心在英国爱丁堡，1975年后位于英国纽伯里。国际地震中心的报告从1964年起出版。只要索取，便可得到报告磁带的复制带。1964-1970年的数据储存于15盘磁带中，每盘磁带长2400英尺，其信息密度为每英寸1600比特(总数为700兆比特)。目前每月处理由50,000—100,000个观测结果组成的数据。要得到经处理的某些遥远的关键台站(如南太平洋台站)的

数据，等待两年是必要的。ISC 每半年还出版一次地震目录。

多年来，美国海岸和大地测量局(USCGS)〔后曾为美国海洋大气局(NOAA)的环境科学服务局(ESSA)，现为美国地质调查局(USGS)〕一直使用有效的震中定位程序。USCGS出版初定震中(PDE)卡片。他们每个月从全世界700多台站获取约40,000个读数，并为800个台站和研究中心提供PDE卡片。利用迭代过程改善了这些报告中的走时数据的质量。开始时，震中位置是由观察宏观地震效应加以测定的，而发震时刻是根据震中区震动起始时间来确定的。开始必须用根据已知发震时刻测定的走时和从已知震中到台站的距离来确定走时曲线。对每次新地震，有四个未知的震源参数：经度、纬度、震源深度和发震时刻。若走时曲线已知，原则上在四个台站上识别的单个 P 波可以确定这些参数，因此台站数在四个以上就能提供修改走时曲线的附加信息。

例如，Jeffreys 和Bullen 从 Zöppritz-Turner 走时表开始，并使用ISS报告的数据，计算每次地震的震源参数。根据所计算的震源参数和初始表，将观测走时相对于计算走时的残差列为震中距的函数，这样得到的系统误差再去校正初始表。1940年发表的Jeffreys-Bullen 走时表是经典地震学中根据到时数据得到的最大成就之一。以E.Herrin(1968)为首的小组着手修改 Jeffreys-Bullen 走时表，制订了一个新的 P 波表。

一旦求出走时曲线以后，很自然就要探明地壳结构以解释观测结果。第一个定量地球模型是由 Wiechert 提出的，他及其同事们的结果至今仍然还有价值。例如，Gutenberg 在1913年给出的核-幔边界的深度值(2900公里)非常接近于最近的估算值(2885—2890公里)。

一旦确定了地球模型，便可以计算未曾考虑过的大量射线路径的理论走时，然后与预测结果作比较。通过这个过程，识别新的震相，观测到时相对于预测到时的残差可用来进一步修改地球模型。

以上我们描述了一个迭代过程，先识别波的类型，测定其时间、震中位置，接着作残差计算、校正走时表和修改地球模型，然后识别新的波型。随着每次迭代循环的进行，我们对地球内部和震源的了解逐渐加深。

在二十年代后期震源研究工作中有一个重要事件，即深源地震的发现。早先Turner(1922)发表的观测结果表明震源深度有很大变化。该结果是以ISS准备时期所得数据为根据的，它没能使许多人信服，因为它还包括了所谓高震源地震(空中)。但后来和达(Wadati, 1928)获得了使人信服的证据，他利用布于日本群岛的密集台网，采用了约50个台站的资料，绘制出由震中传播出去的P波和S波的波阵面图。他比较了具有共同震中的两个事件，发现一个事件的波阵面传播比另一个事件快一倍，对这个观测结果的唯一解释是两个事件的震源深度相差很大。

自从浅田(Asada, 1957)报告了在日本筑波正常活动周期为每天200多次震动以后，已普遍认为构造活动地区小地震的时空分布是了解现代构造活动的基本资料。他采用了一个与电子放大器(那时尚未普遍用于地震学)相连的动圈式换能器获取微震记录图。目前已遍布全世界的约50个永久性地震台网记录了大量有关每个地区微震波走时和振幅的数据。这类台网中开支最大的是1966年以来由美国地质调查局在加利福尼亚中部运转的台网。在该台网中，通过商业电话线把从约260个台站(1979)所得的地震信号传输到门罗公园的分析中心，大多数地震的震中位置和震源深度的精度分别优于2.5和5公里。该台网用于监测可能发生在大地震前的所有现象，地方震和远震的走时数据也用于研究台网下地壳和上地幔的速度结构。

另一个重要发现是在地震学发展早期，使用密集台网资料作出的。第一个令人信服的初动方向的象限图象由志田于1917年5月18日对一次日本地震观测而得。震源机制的理论和实验研究结果都在1930年前后为许多日本地震学家所相信。本多

(Honda,1962)对早期工作和他自己的工作作了完整的总结概括。其中包括深源地震的最大和最小主应力轴平行于地震带的平面。这现在已是一幅熟悉的下行板块中的应力图。

本世纪五十年代 Hodgson 及其同事采用 Byerly 方法，把震源球投影到地震台站图上，广泛地研究了初动图象的全球资料(Hodgson,1957)。由于初动方向通常不在台站报告上给出，他们发出调查表到地震台站去收集资料。以这种方式收集的资料当然不够理想，通常有 15%—20%的数据与最后的解不一致。六十年代新资料的引入使不一致明显减少(小于1%)，因为同一个观测者以同样的方法直接从世界标准地震台网的标准化长周期地震仪记录图中读取初动得到新的资料。这种方法帮助 Sykes(1967)证实了 Wilson 有关转换断层的想法 这种想法把三种不同类型的地震带[洋脊、岛弧和块体构造(Richter,1958)]结合成一个全球体系，以致革新了地震构造的概念，还明显地提高了断层面解的可信度。

世界标准地震台网是本世纪六十年代创建的，该台网由图11.1 所示遍布全世界的约 120 个连续记录的台站组成，它显然是全球通用地震台站系统中最完善的。每个台站都配备有 3 个短周期地震仪和 3 个长周期地震仪，以便测定垂直分量和两个水平分量的地面运动。这些仪器是由动圈式摆与记录电流计相耦合组成的。短周期地震仪的摆和电流计的自由周期分别为 1 秒和0.75秒，而长周期地震仪的摆和电流计的自由周期分别为 15 或30秒和100秒。短周期系统的最大放大倍数可以以 6 分贝为可变阶程，从 3125 变化到 400000 倍，长周期放大倍数的范围是 750--6000倍。每个台站每天提供 6 张记录图（29.2×91.4 厘米)。资料中心（全国地球物理和日地数据中心，隶属美国国家海洋大气局，在科罗拉多的博尔德)收集记录图，并把复制品分发给任一需要者；其中有原尺寸大小的，有 35 毫米胶卷的，有 70 毫米胶片的，还有包括 24 张地震图的微型卡片(10.5×15厘米)。

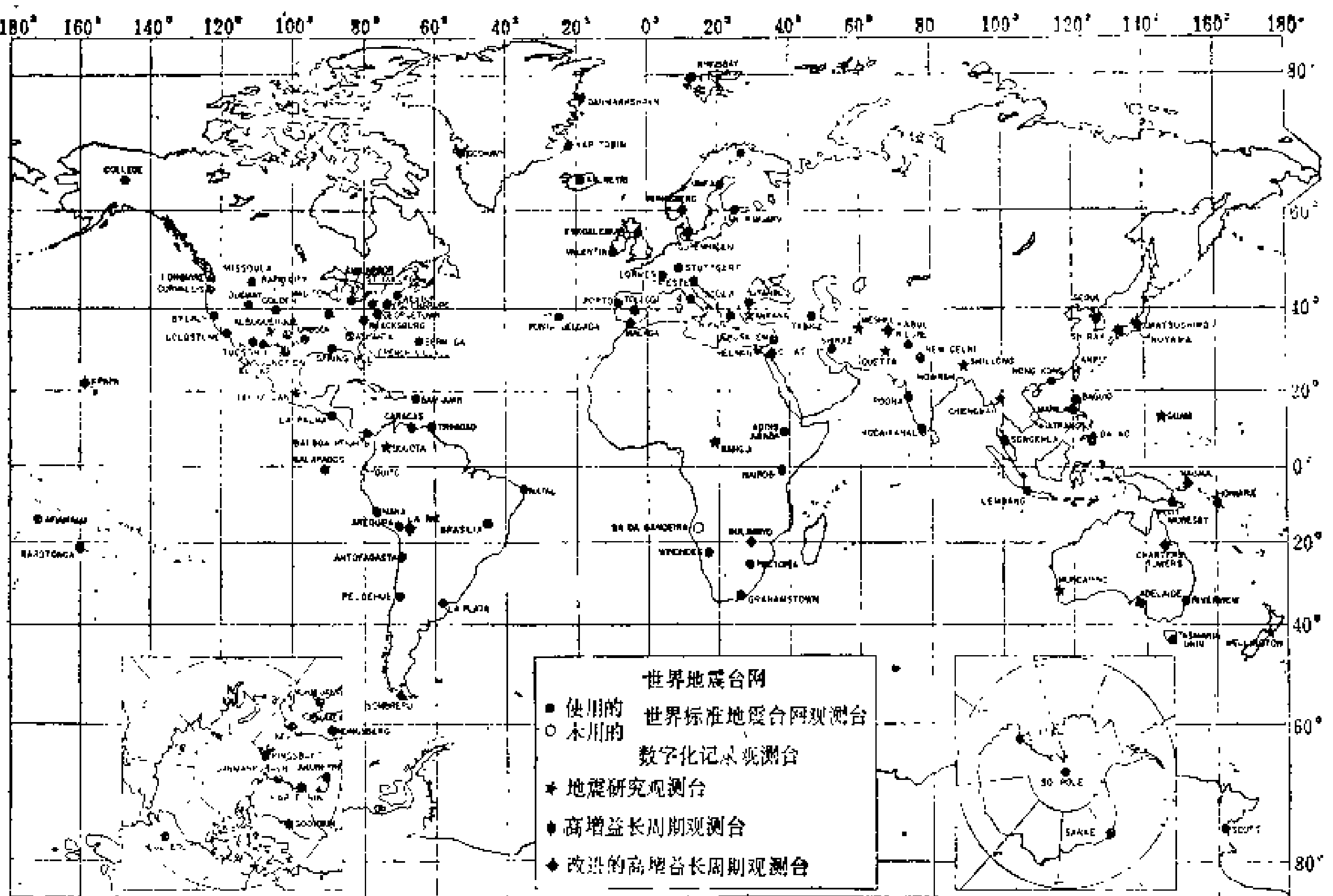


图 11.1

世界标准地震台网的台站(据美国地质调查局，1977年3月)

世界标准地震台网数据的实际效果只是刚开始显示出来。本章中至此讨论的数据是时间、振幅和特定波群的初动方向，地震图中其余部分均被忽略。由于全球范围标定得很好的地震图易于资用，在地球结构和震源机制研究时就很可能采用一组波的波形或波谱，或甚至整个记录图，这就使地震学成了确实定量的科学。我们把这称为波动理论法，而把仅使用波群的时间和振幅作为数据的方法称为射线理论法。

地震学的波动理论法已有很长的历史了，一直可追溯到1904年Lamb关于由半空间点力产生地震波的经典论文。Ewing，Jardetzky和Press(1957)总结了这些理论成果，并讨论了它们对各种不同实验的应用。他们书中阐述成功的应用，再加上数字计算机的出现，促进了六十年代波动理论法的产生。该方法主要对长波有效，因为长波对地球结构的细节不灵敏，因此简单模型较为合适。

在波动理论法中最简单形式的数据是未加处理的地震记录图。这样，对一模型计算所得的理论地震图(其中包括仪器响应)就可直接与观测记录进行比较。这种比较的第一个成功的实例，也许是Pekeris在1948年所进行的海洋声波的工作。较为普通的数据形式是地震图上的选定部分，一般认为由少量已知波形，如Rayleigh波，Love波及其高阶振型组成。

若该部分地震图基本是由单一振型组成的，则观测到的波$f(x,t)$可用一简单表达式近似为

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,\omega)|\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x}{c(\omega)}\right)+i\phi(\omega)\right]d\omega,$$

式中t是时间，x是震源到接收台站的距离，$\phi(\omega)$是震源的相位延迟，$c(\omega)$是相速度，$|f(x,\omega)|$是振幅谱密度。佐藤(Satô，1955)成功地应用了该近似式，从此该式被大量应用于测定地震波的衰减、相速度和震源的相位。因此，在地震图中选定部分的振幅谱和相位谱现在是地震学中的重要数据。

在加利福尼亚理工学院管理的加利福尼亚南部台网中设有Benioff长周期地震仪(摆的周期1秒，电流计周期90秒)，利用该仪器记录图，Press(1956)首先测定了相速度。他的测定达到了研究台网下地壳结构所需的精度。

佐藤(Satô,1958)第一次测定了面波沿着整个大圆多次往返的相速度和衰减。他使用了另一种Benioff长周期地震仪所得的单台记录。

1960年前后，当安艺(Aki、1960)，Brune(1960)和Ben-Menahem(1961)开始使用长周期面波的振幅及相位谱进行震源机制的研究时，主要资料是加利福尼亚理工学院地震实验室管理的Benioff地震仪的记录，或是哥伦比亚大学拉蒙特-多尔蒂地质观象台与地方大学合作管理的全球长周期地震台网的记录，这个台网是在地球物理年(1957—1958)安装并开始工作的，它由分布在世界各地的约12个台站组成，可以认为是世界标准地震台网的原型。

六十年代初期,Benioff等(1961),Ness等(1961)和Alsop等(1961 *a*)在1960年智利地震记录的功率谱中发现了与整个地球的各种自由振荡振型相应的频谱峰值后，整个地震图的Fourier变换变成了一组重要数据。虽然用于测量谱峰值的多数数据是从约为8级的地震获取的，但现代的低噪声地震仪，如Block-Moore加速度计，所记录的中等大小地震的记录图也可用于地球自由振荡的分析研究工作。

Helmberger(1968)在时间域体波脉冲形状的研究工作中取得了重要进展。Luh和Dziewonski(1975)证明时间域中的整个长周期波列可认为是基本数据部分。

世界标准地震台网是波动理论法所需数据的极佳来源(如Müller, 1973)，但也存在一些问题，目前正在改进。其中最主要的缺点应该说是该系统采用了模拟记录。世界台站自由振荡数据的综合分析需要几百万位数字化数据，这就意味着对一个地震

要进行几个月的人工劳动．现在正在对一些世界标准地震台网的台站进行改进，以采用数字记录．全世界(在1979年)约有20个数字记录台站在工作，其中包括10.3.5节中所描述的地震研究观测台站(SRO)和国际加速度仪布署计划(IDA)台站．这些数字数据与世界标准地震台网数据一样也可以从同一数据中心获取．

数字记录的优越性和效能已为最初设计来监测、识别远距离地下核爆炸的大孔径地震台阵所证实．在美国蒙大拿州有一个台阵包括525个短周期垂直向地震仪(分为21个子台阵)和21个长周期三分向地震仪，布设在直径约为200公里的地区内(图11.2)．信号以每秒20次的速率采样，数字化字长为15位，信息流达到每秒150千位．(该数据速率分几次降低，直至台阵停止工作为止．)台阵数据用于增强远震信号，以便测量震相的慢度

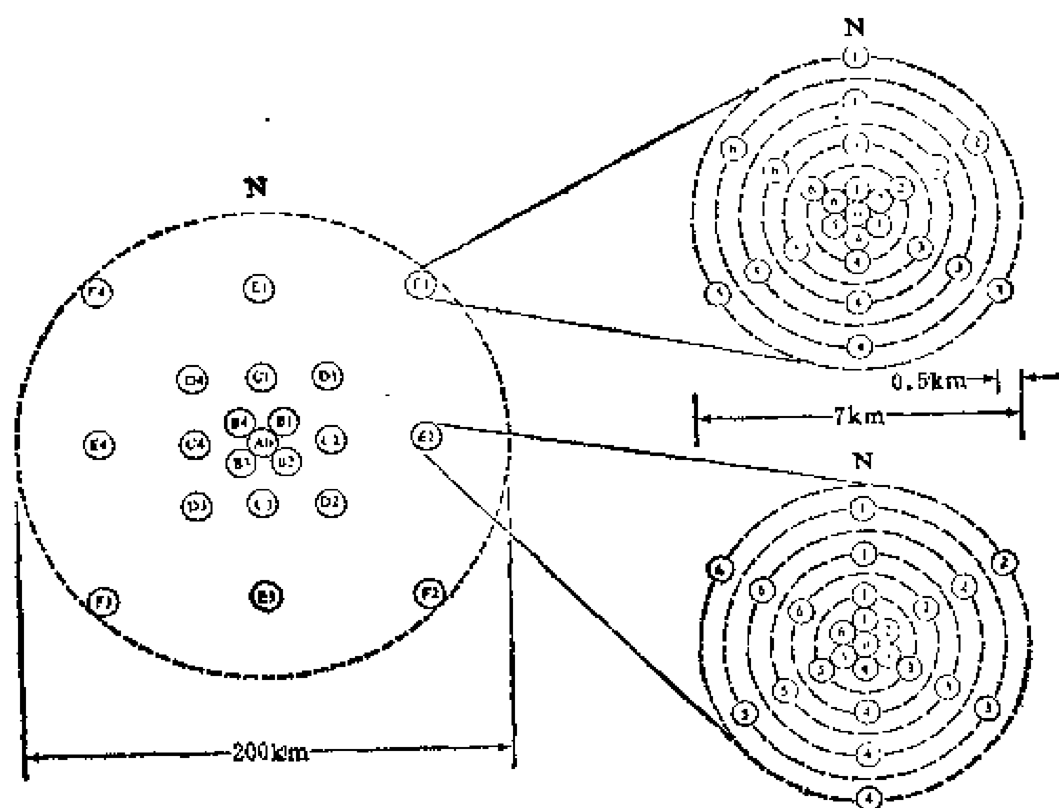


图 11.2

蒙大拿州东部的大孔径地震台阵图。它由21个子台阵组成，每个子台阵有25个短周期垂直向地震仪和1个长周期三分向地震仪

($dT/d\Delta$)，估算波数谱和研究台阵下的结构。本章后面我们将进一步讨论台阵数据。

世界标准地震台网的另一缺点是线性度差、动态范围有限。大地震会使电流计偏离超出刻度或使记录线看不见。还可能有因为附近小地震的短周期强烈运动而激发起来的仪器高阶振型的非线性交叉耦合而产生寄生的长周期信号。

专门设计来记录强震运动的加速度仪已广泛应用于几个地震活动区。大量数字化加速度图已发表，可用的资料正在迅速地增加。

由于最初对加速度图感兴趣是为了提供设计抗震结构的根据，因而多数加速度仪布设于建筑物内和土中，极少布设在坚硬的岩石上。为了研究地震机制，极需从安设在较短距离上、较硬岩石上的仪器得到加速度图，因为这样的加速度图受到如散射和衰减等传播路径的复杂影响较少。美国海岸和大地测量局获得的1966年加利福尼亚州帕克菲尔德地震的加速度图是第一张用波动理论分析的图。安艺(Aki，1968)和Haskell(1969)运用弹性位错模型作了分析处理。近场数据不仅提供了单用远场数据不可能求出的震源参数的资料，而且近场波动理论研究最终会使我们有可能预报在断层带附近由预期的地震所造成的地震运动——这点尤其为地震工程师所需要。

11.1.2 人工震源

地震震源是最强大的天然地震波源，但利用它并不是很容易的。因为地震是罕见的事件，为了收集有用的数据而让地震仪连续记录以等待地震，从经济上说是效率很低的方式。

利用人工震源就能有效地收集高质量的数据，因为在这种情况下可以经常提供时间和振幅的高精度源量；若试验能在较短时间内完成，则还能提供密集的空间覆盖。

Robert Mallet(1848)第一个使用爆炸源作了地震波的测量，他对作为地质研究手段的地震学方法所具有的价值有清晰的概

念。在题为"论地震的动力学：把所观测现象归纳为波在固体、流体中运动的已知规律的尝试"的文章中，他提出了绘制海底地质图的地震方法。海洋占地球表面总面积的四分之三，但那时几乎根本未作过勘探。他还强调了在试验中必须精确地测量地震波速，以便建立速度和岩层之间的关系。

他确实在爱尔兰的沙滩和附近岛屿的花岗岩上进行了这样的试验。他把几磅炸药埋在地下四、五英尺深处，引出一带有电池的导线回路，记录台站的距离为一英里。他的地震仪是一个十一倍放大镜，利用容器内的水银把反射表面聚焦在十字发丝上。试验者点着炸药，当十字发丝的映象模糊或消失时，检测地震波的到达时间。这些试验的结果给出了在沙中传播的地震波速为824英尺/秒，而在花岗岩中传播的地震波速为1306和1664英尺/秒。这些波速很低，可能与面波有关。由于地震计很粗糙，试验者一定错过了初动。

用人工震源采集的有两个基本上不同的数据组。一组是通过折射，另一组是通过反射得到的。在折射法中，把波的到时作为距震源距离的函数来测量。在反射法中，把反射信号作为从震源到反射物，再到接收台的往返中所用去的垂直走时的函数。前一种方法给出层速度的资料，后一种方法则给出分界面处阻抗差的资料(见第十二章)。

显然，Robert Mallet 是折射法的发现者。DeGolyer(1935)在关于应用地球物理的早期历史的精辟论述中，对 Riginald Fessenden 发现反射法曾给以应有的评价。1914年，Fessenden 提出了用声学方法测量海底深度的专利应用。1917年，他又提出了另一项有关矿体定位的方法和设备，这正如地质岩层定位一样，明显地涉及折射和反射。1924年以德国 L. Mintrop 为首的公司派出一个小组，第一次用地震方法在得克萨斯本德堡县发现了油田。

1935年10月 Ewing Crary 和 Rutherford (1937) 乘伍兹霍

尔(Woods Hole)海洋研究所的大西洋号轮船，在马萨诸塞州伍兹霍尔向南沿伸的直线上布置了四个台站，进行第一次海上折射测量。在这些早期测量中，用一只小小的捕鲸船去点燃炸药。轮船载着记录装置抛锚停泊，用电缆把地震检波器放到海底，电缆把地震检波器和照相记录示波器联结起来。地震检波器是固有频率为35赫的垂直摆，其输出送至示波器的90赫电流计中去，时间记号根据50赫音叉振荡标在记录图上。

第一次深水折射剖面是Ewing等(1950)在1949年2月使用伍兹霍尔的大西洋号和Caryn号船作出的。检波器是悬浮在离接收船Caryn号100英尺远50英尺深处(在会受到风力干扰深度的下面)的水听器(压力检测器)。当船沿折射测线移动时，从大西洋号发出枪响。Ewing及其同事们的这项工作和以后的一系列工作揭示了地球结构最显著的特点之一：与大陆地壳平均深度(约35公里)相比，海底地壳薄得多(约7公里)。

后来在英国剑桥大学发展了声纳无线电浮标系统(Hill, 1963)，该系统只需一条船，用无线电把地震信号从用浮标悬挂的水听器传输到启爆船上。夏威夷大学的一个科学家小组把该方法发展到距离为700—2000公里的范围(Odegard and Sutton, 1972)。在阿留申群岛坎尼金进行核试验时，他们用飞机做接收台。

1960年前，在大西洋深部盆地的各部分已记录了大大超过100次折射剖面，在大陆架和地中海也已作了差不多次数的测量，太平洋和印度洋则主要由Scripps海洋研究所进行研究。根据Shor和Raitt(1969)的总结材料，该所收集了229个台站的数据。典型的台站由两个相反的剖面组成，每个剖面约40英里长。一个台站进行80次爆破需要约1600磅TNT。离接收台最远的爆破点通常需要50—100磅TNT，天气不好时，3000磅也很常见。

爆破点和记录台的密集覆盖揭示了海底上地幔中P波速度的各向异性。分析这些数据时，Raitt等(1969)使用了推广后的时

间项法(Scheidegger and Willmore, 1957)，把到时表示为三项之和（震源项、接收器项及只取决于震源到台站的距离和方位的项），这样就把横向不均匀性效应和各向异性效应分离开来。

现在让我们考虑陆地上所得的折射数据，并看看由此已得到了哪些新发现。1909年塞尔维亚地震学家A. Mohorovičić研究了一次巴尔干地震的初动到时，发现以距离为函数的走时是由两条直线组成的，一条相应于穿过地球的直达波，另一条相应于从现在称为Mohorovičić间断面(简称为M间断面或莫霍面)折射的波。1946年，第二次世界大战剩余的大量高级炸药在很多国家可以用了，这大大推动了海上和陆上的折射研究工作。1947年几个欧洲地震学家在赫利戈兰(Heligoland)联合进行了一次大爆破试验。根据这次试验所发现的上地幔速度远远大于Jeffreys-Bullen表中指出的速度。

在苏联，正在执行一个庞大的折射研究计划，称为“深部地震测深”(DSS)，采用了G. A. Gamburtsev提出的震相校正技术。沿30—40公里(有时为70—80公里)长的线安放地震检波器，间隔为100—200米，每段直线间间隔为10—30公里，总覆盖长度约为500公里。沿线几个爆破点上用二、三吨炸药。据Kosminskaya和Riznichenko的总结报告(1964)，在苏联由DSS所作的详细剖面总长度为10000公里，海洋部分则有15000多公里。

由DSS所得的数据使地震学家们能在一定距离上一个一个地追踪一组特定的波，以便识别从地壳和上地幔中特定间断面折射和反射的波，还用这些波的有关振幅深入研究这些分界面的特性。此外在世界很多地区都进行了折射研究工作。McConnell等(1966)曾把研究成果制成表。

在北美还做了把折射剖面扩展到1000多公里的工作。1963年华盛顿Carnegie研究所组织了一次以苏必利尔湖为中心的大型国际合作试验(Steinhart, 1964)。通过试验除了发现苏必利尔湖下极其复杂的地壳结构外，还发现1吨级爆破所产生的地震波

在 2000 多公里外也能被检测到。受此鼓舞，美国地质调查局于 1964 年作了从苏必利尔湖到亚利桑那州中部的长距离折射测量(Roller 和 Jackson, 1966)。这又导致另一次试验，称为“早期隆起研究计划(Project Early Rise)”，试验时在苏必利尔湖进行了 38 次 5 吨级爆破。北美的大学和政府机关的几个工作小组参加了沿图 11.3 所示剖面的记录工作。从苏必利尔湖到科罗拉多 400—1350 公里距离上所得地震图见图 11.4(Hales, 1972)。

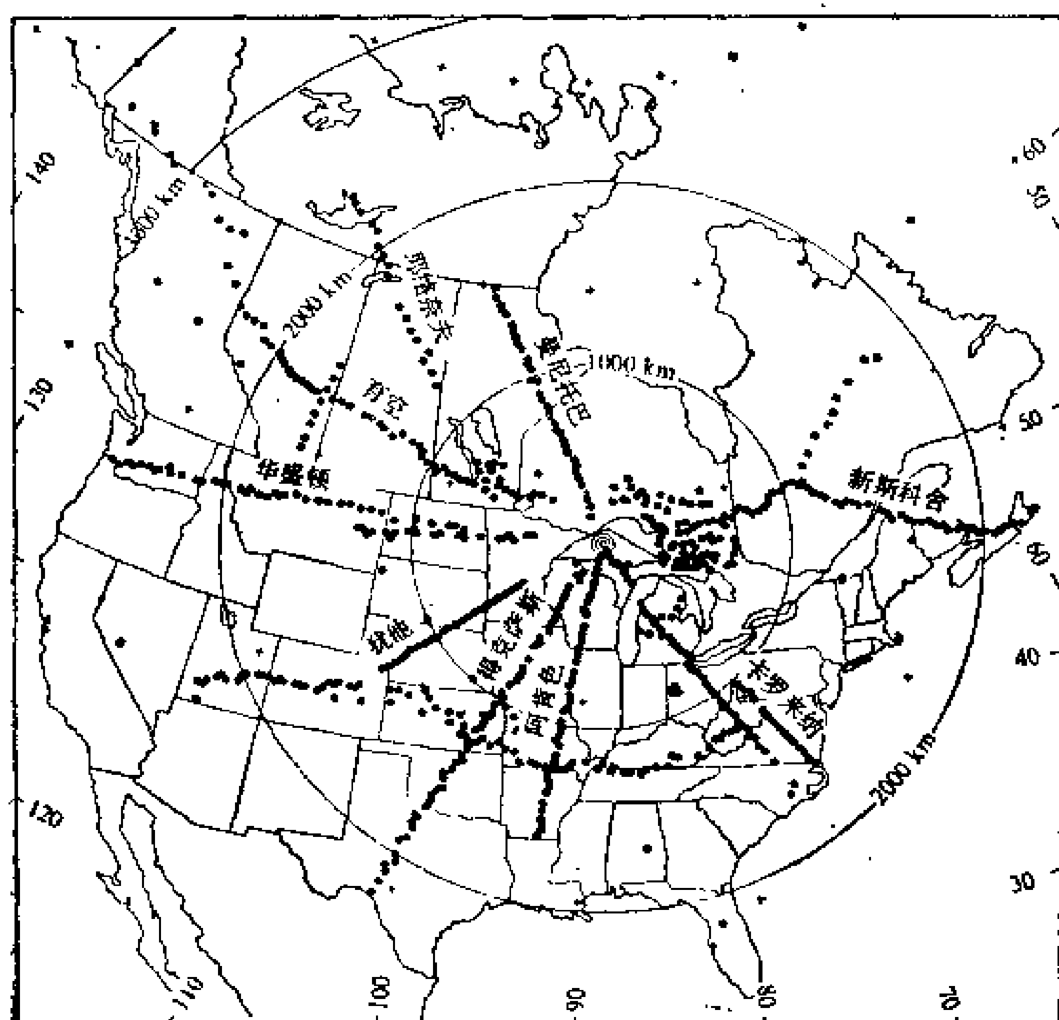


图 11.3

“早期隆起研究计划”的地震仪台阵。同心圆表示苏必利尔湖中的爆破地点(引自 Iyer et al.,1969)

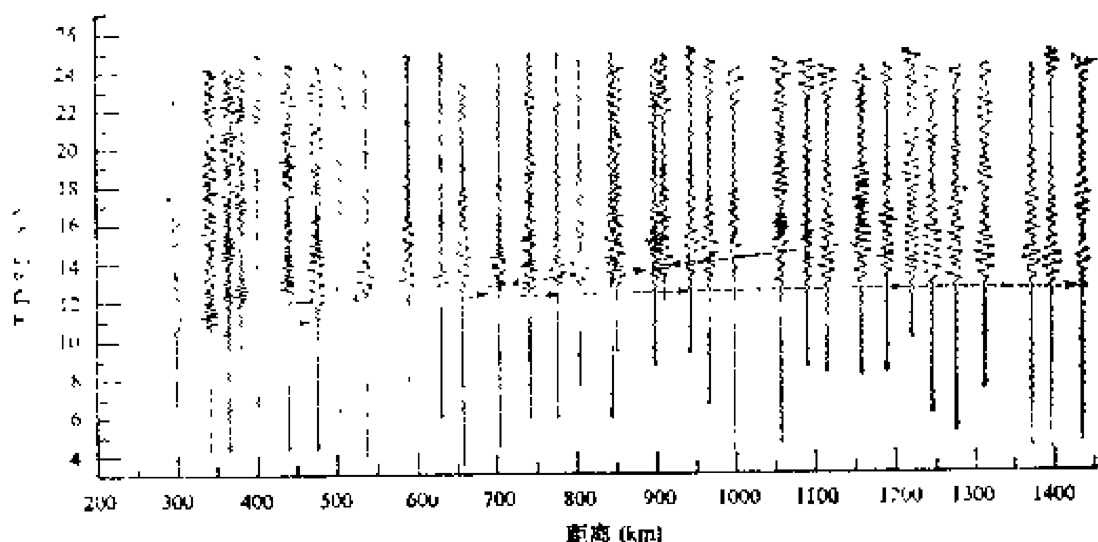


图 II.4

早期隆起阿肯色剖面的部分记录。地震图按震中距和与视速度为8.5公里/秒波的相对时间排列(引自Hales,1972)

内华达试验场和其它地区的地下核爆破也提供了大量地震数据。直到1976年12月31日为止，美国进行了614次核爆破，据推测苏联进行了354次核爆破。Griggs和Press(1961)和Springer和Kinnaman(1971)的文章中有未曾分类的爆破的目录。约有500次爆破列有发震时刻、位置、深度、TNT当量、爆破介质和潜水面与该爆破地点的岩性的资料。其中有5次爆破的TNT当量约为一百万吨或更多。一百万吨爆破的震级(m_b)约为6.3，已大到足以能为几乎在世界任何地方的标准观测地震仪所记录。这些数据对检验由地震所得的结果当然很有用。

布设了约40个配备有三分向短周期和长周期地震仪的流动台站，以便观测美国国内核试验产生的地震波。爆破记录在35毫米胶卷和1英寸14道磁带上。这些流动台站称为长距离地震测量(LRSM)车；它们和永久台站一起提供了用于振幅和走时研究的高质量数据。1961年12月在新墨西哥州格诺姆(Gnome)爆破明确地显示了上地幔的横向不均匀性；在美国地幔顶部的P_n

速度在 7.5—8.5 公里/秒之间变化，相对于标准走时表的走时残差在美国东部和西部之间是不同的，相差最大的达 11 秒 (Herrin and Taggert,1962)。这表明，若考虑这种横向不均匀性效应，则震中定位误差会降低一个数量级。采用长距离地震测量数据还发现了振幅-距离关系的地区变化(Evernden,1967)。

Hales(1972)在一份关于距离为 3—30°的 P 波走时的总结报告中，把早期隆起研究试验(苏必利尔湖震源)所得的上地幔模型与根据美国西部内华达试验场爆破和地震观测结果所得的模型进行了比较。后者在上地幔有发育得很好的低速带，而前者没有，至少对 P 波来说没有。由于低速带在板块构造过程中起关键作用，该低速带是否在全球范围内存在，这是岩石圈动力学中的重要基本问题。

在长距离折射测量中，剖面图覆盖了各种具有不同地球物理性质的地区。很难确定所观测的地震图的特征是由竖向不均匀性还是横向不均匀性产生的。我们需要三维地球模型才能求得唯一的解释，而这样的模型则需要多几个量级的数据。

由于折射波的路径几乎是水平向的，走时数据表示以某种方式在一水平距离上平均的地震波速，因而折射法在水平方向的分辨能力较差。而接近垂直的反射法在水平方向上的分辨能力大得多，于是在需要一个有效的地震方法以详细研究地球的横向不均匀性的时候，后一方法越来越重要了。

为了寻找天然气田和油田，地球物理勘探工作者广泛收集、处理和分析了反射地震数据。该领域中一次变革性的进展称作“数字变革”，是六十年代从模拟记录、处理、分析到数字形式的转变。这样提高了数据质量和用数字计算机处理的适应性，并更便利于进行人机对话，以致分析者最终能够审查资料，并能评述、修正和实时检验各种假说。Schneider(1971)概述了美国在这方面的进展。

勘探地震学中典型的反射数据组以下列方式获取，24 个地震

检波器组排列在8000—9000英尺距离上，所得的地震信号送到具有二进位增益控制的放大器。当输入信号电平降到低于某一阈值时，该放大器的增益增加一倍，当输入信号电平降到低于该阈值的一半时，增益又增加一倍。倍率变化发生在采样时间之间，增益变化分别被记录下来。输入信号的动态范围可高至170分贝（3×10^8到1）。24道数据可在2微秒间隔中被数字化成15位字长的字。一次典型的反射记录长度为6秒，因此一次爆破会产生1兆比特信息。

对于24道的系统，每次爆破后爆破点就向前移动一组间隔。简单地移动检波器排列一端的那组，把它加到另一端，这样每次爆破时，排列也向前移动一组。该过程会产生12个重叠的共深度点(CDP)叠加所需要的地震记录图。有关这种叠加的阐述见11.5.1节。一个10公里长的剖面产生的数据约为100兆比特。

海上的反射地震数据一般是用8000英尺拖缆对有24重的叠加进行收集的，这些拖缆是把拖曳过水的感压水听器联结起来的海上电缆，收集数据时船不停。

为在海上作连续反射剖面，已采用了多年非爆破源，如电声传感器、电火花器、煤气爆破器和空气枪。此外，如VIBROSEIS*(水压振动器)这样的非爆破源也越来越多地代替高效炸药。该装置节约许多时间，因为不需要挖洞，用它还能在不允许使用炸药的地方(如城镇)采集数据。

较深的近于垂直反射的数据，如从莫霍间断面来的反射数据，还未曾广泛收集。为了明确识别近于垂直反射的到时，必须满足几个判据。波阵面必须几乎是平行于水平向的，以便消除低速面波或从横向不均匀体反向散射的可能性。必须根据斜率X^2/T^2(见12章)得到可接受的平均速度值，这里X是离爆破点的水平距离，T是走时。较浅间断面上的多重反射决不能误认为较深处

* 大陆石油公司的注册商标。

的初次反射。由近地表不规则性引起的振幅变化必须消除。由于走时距离长些，横向不均匀性对较深处反射的影响要比对较浅处的反射强。而且，正如折射测量中一样，若需要三维的解释，这就要求大得多的数据量

然而，在几次有利情况下，上述判据竟然都得到满足，深部反射被明确识别 例如，Kanasewich 和 Cumming(1965)在加拿大西部，根据爆破后约 12 秒到达的强烈反射，发现了 Riel 间断面、该间断面在约 35 公里深处分隔了速度为 6.5 公里/秒上地壳层和速度为 7.2 公里/秒的下地壳层。在一次深入的反射研究(Clowes 等，1968)中，发现该间断面在 25 公里距离上有 8 公里的构造起伏，从而证明反射法有很高的分辨能力。

大陆反射探测机构(COCORP,即Consortium for Continental Reflection Profiling)的一个小组(见 Oliver et al.,1976)报告了使用反射法研究地壳深层和地幔顶层的主要工作。用具有几个大振动器和产生较低频率(10—32 赫)的波的水压振动技术，在得克萨斯哈德曼(Hardeman)县得到 45 公里深处的反射波。本节下半部分中将叙述：一般说来，在横向几公里处，反射不是连续的。

补充 11.1

记录方式

在 11.1.2 节中我们提到了"数字变革"，它发生在记录和处理勘探天然气和油田用的数据的过程中。在动态范围和便于用计算机处理方面，数字记录比模拟记录优越。缺点是每单位面积记录介质的信息密度低。这点对观测天然震源是很重要的，因为在记录事件前要等很长时间。

在信息密度方面，磁带上的模拟记录比数字记录优越。例如，频率响应高到 100 赫的 12 道地震信号可被调频、混合并记录到可记录10千赫的磁带记录器的一个信道上。只要校正带速，每一地震信道的动态范围可能大于 50 分贝。由于50分贝约相应于8位信息，而 100 赫信号要求

采样速率为200次/秒(见11.2.2节),因此由上述模拟记录储存的信息达到20000位/秒。当带速为$7\frac{1}{2}$英寸/秒(相应于记录10千赫)时,每单位带长的信息密度约为3,000位/英寸。这大大高于数字记录(带宽为1.2英寸,一般为800位/英寸)可达的密度。

目前已研制出了带数字存储器和判别能力的数字事件记录器(如Ambuter and Solomon,1974)。这样的装置可在信号到达时触发磁带记录器并完整地记录信号。磁带记录器达到正常速度前信号的最初部分不会丢失,因为在任何时候,存储器保存着前几秒钟的信号。一旦触发,磁带记录器记录下存储器的内容和随后的信号。

用针尖刻划煤烟灰覆盖的薄纸做成的熏烟纸记录,仍然是地震学密度最高的记录方式之一。滚筒缓慢地顺着水平轴转动,滚筒外裹有纸,记录在纸上。这种仪器已用了多年,现在仍然在微震研究中使用。

在标准地震台站如世界标准地震台网台站上,用螺旋式滚筒在照明纸上进行记录。记录的详细情况见11.1.1节。

应用蒙大拿州大孔径地震台阵对内华达百万吨级地下核爆破观测的数据,Engdahl等(1970)观测到地球内很深处的反射。这些是从液态外核和固态内核($PKiKP$)边界产生的近于垂直的反射(穿过大孔径地震台阵的核的慢度$dT/d\Delta$为0.3秒·度$^{-1}$),在爆破后16分37秒到达。

11.2 地震数据的质量

在11.1节中,我们描述了各种地震数据,并对质量提高后的新数据如何促进了地球内部状况的发现,作了简要的历史回顾。本节内我们将讨论,是什么决定了地震数据的质量以及如何进一步提高质量,以便对地球内部进行更详细更精确的研究。

为此,我们引入信号和噪声的概念。我们定义信号为数据中

所需要的部分，而噪声则为不需要的部分。对那些知道如何分析、解释数据的人来说，数据的某一给定部分是“信号”，而对那些不知道的人，它就是“噪声”。在这个意义上讲，我们对信号和噪声的定义是带有主观性的。例如，直到找到合适的解释方法之前，多少年里一直认为 P 波和 S 波的初至到时是地震给出的唯一信号，而地震图的其余部分，如面波、尾波，只能被认为是无用的。

因而，通过把新技术应用于旧数据，分析人员会体验到有新发现的那个时刻的喜悦，就象数据收集人员在应用一种新的观测仪器时的心情一样。随着分析技术的发展，给定数据的信噪比会增加。这个比率决定了给定数据中所包含信息的质量。

11.2.1 采样法则

为了能定量地讨论地震数据中的信噪问题，我们把地震图数字化为离散的时间点。先讨论瞬时地震图 $f(t)$，设其 Fourier 变换 $F(\omega)$是存在的〔请比较(10.20)和(10.21)〕，我们得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega. \qquad (11.1)$$

假设 $f(t)$不包含高于W 赫的频率，则可把式(11.1)写成

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi W}^{2\pi W}F(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega. \qquad (11.2)$$

由于 $F(\omega)$是当$-2\pi W\leqslant\omega\leqslant2\pi W$ 时确定的，它可由具有基本波长为 $4\pi W$ 的 Fourier 级数来表达：

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{i\omega n/2W} \qquad (11.3)$$

系数 F_n 由下式确定：

$$F_n=\frac{1}{4\pi W}\int_{-2\pi W}^{2\pi W}F(\omega)e^{-i\omega n/2W}\,d\omega. \qquad (11.4)$$

比较上式与(11.2)，可发现

$$F_n=\frac{f\left(\frac{n}{2W}\right)}{2W}. \tag{11.5}$$

将(11.5)代入(11.3)，然后代入(11.2)，可发现 $f(t)$ 完全是由间隔为 $1/2W$ 的离散点上采样的值确定的。

$$f(t)=\frac{1}{4\pi W}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right)\int_{-2\pi W}^{2\pi W}\exp\left(\frac{i\omega n}{2W}-i\omega t\right)d\omega \tag{11.6}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right)\frac{\sin\{\pi(2Wt-n)\}}{\pi(2Wt-n)}. \tag{11.7}$$

式中 $t=m/2W$ 时，m 为一整数，两边都变为 $f(m/2W)$。

这样完全可以用间隔为 $1/2W$ 所取的离散采样来描述不包含频率高于 W 赫的地震图 $f(t)$。若 $f(t)$ 的时间长度为 T 秒，描述 $f(t)$ 所需的采样总数则为 $2WT$。地震图 $f(t)$ 中的信息量可以用存储它所需的存储器大小来量度。若每个采样点上的数据被数字化为 0 到 2^m-1 间的整数，则存储 $f(t)$ 所需要的存储器大小为 $2WTm$ 位。若增加 m，则信息量也成比例地增加。但因为数据总包含某些噪声，所以信号带来的有用信息总有限度。

根据 Shannon(1949) 的观点，当信号和噪声都是有限带宽的白噪声时，对有用信息的极限量有个简单的公式。分别用 S^2 和 N^2 表示信号和噪声的功率，有用信息的极限量由下式给出：

$$WT\log_2\frac{S^2+N^2}{N^2}. \tag{11.8}$$

当数据被数字化成 0 到 $\sqrt{S^2+N^2}/\sqrt{N^2}$ 范围内的整数时，这与所需的存储器大小相应。

补充 11.2

符号

直到目前，我们避免使用如 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的 Fourier 变换这样的专门符号，而用了 $f(\omega)$。若该变换为一抽象式时，这方便些，但在进行数据处理时，发震时刻序列及其变换可能是个数组，每个数组在某个计算机存储器中确定，于是我们需引入 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的 Fourier 变换，F_n 为离散频谱。

本章内我们采用显求和符号，而不用重复脚标的隐求和符号。

11.2.2 混淆现象

如前一节中所示，当地震图包含高到 W 赫的频率时，间隔为 1/2 W 秒的离散采样完全确定了地震图；如果以小于 1/2 W 秒的间隔采样，则数据就会过多，但却不会引入误差。倘若采样间隔大于 1/2 W 秒，则会产生一种很严重的情况。图 11.5 表示了频率为 W 赫、在间距相等、间隔大于 1/2 W 秒的离散时间上采样的正弦曲线。若把已采样的点平滑连接，这些点就显示了原始数据不存在的周期性。Blackman 和 Tukey(1958) 把这种不希望有的效应称为混淆现象。

因为 $f(t)$ 的采样实质上是时间域中 δ 函数的 Dirac 梳齿状组合 $\Sigma_i\delta(t-i\Delta t)$ 与它相乘，所以会产生混淆现象。在频率域中这就成了褶积，而 Dirac 梳齿状组合的变换则变成频率域中的组合 $\Sigma_i\delta(\omega/2\pi-i/\Delta t)/\Delta t$。以这样的梳齿状组合进行褶积会重复间距为 $(1/\Delta t)$ 赫的间隔处 f 的频谱。若 f 的带宽 2 W 赫大于 $(1/\Delta t)$，则会出现某种不希望有的信号重迭，给出已采样函数的伪频谱。

11.2.3 初动的测量

波组初动的到时和方向是最广泛收集的地震数据。对于 (i) 绘制走时曲线，(ii) 确定震中和震源深度和 (iii) 断层面解，这些是基本数据。我们目前对地球内部结构和地震活动性、地震机



图 11.5

混淆现象：因为采样间隔大于信号中所包含的最短周期的一半，故所取的样为假信号(虚线)

制以及现代构造活动的了解，大部分都是通过测定初动得到的，这是因为简单有力的射线理论解释对初动非常适用。

为识别初动，必须能说出信号是否存在。也就是说，地震学家需要一位信息。11.2.1节中我们确定了在数据的时间单位长度(这由信噪比和频率范围来表征)中包含多少位信息。利用式(11.8)，Pakiser 和 Steinhart(1964)提出，由于

$$\Delta t=\frac{1}{W\log_2\left(1+\frac{S^2}{N^2}\right)} \tag{11.9}$$

给出的时间长度 Δt 中包含了一位信息，Δt 可被认为是测量初动到时中误差的量度。

上式表明，测量初动到时的误差反比于频率带宽 W，但误差以对数形式依赖于信噪比。信噪比大时，信号振幅的增加只略略改善了时间测量的精度，因为误差反比于信噪比的对数。

在应用式(11.9)于实际地震图时存在一个问题 在(11.9)中很明显，平均信号振幅 S 在时间上是平稳的，另一方面，根据定义，初动具有零振幅。显然，在式(11.9)中设 $S=0$ 是无意义的。

为了求解这个问题，安艺(Aki，1976)选择了一些地方震的

低噪声地震图，并把它们与计算机产生的、具有各种均方振幅的噪声混合起来。几位地震学家测量了输出，把初动到时和方向的误差当作信噪比的函数来研究。

想用平稳的时间序列模拟初动显然是太天真了，而且观测到时的误差对噪声功率的依赖关系与根据(11.9)计算所得的依赖关系吻合得不好。在没有更好的模型的情况下，安艺在观测误差与计算误差间强行调整，结果是：当初动的均方根信号振幅 S 为 P 波波组最大振幅的 1/20 时，两者吻合得最好。也就是说，粗略说来，"初动"的信号电平约为 P 波波组最大振幅的 1/20。

关于读取初动时的误差方面发现了一种有意义的结果：当噪声电平很高时，错误读取初动方向的几率可超过 0.5。这种情况下，与地震学家所拾取的初动方向相反的方向到可能是对的。其理由也许是：很多情况下，P 波的第二个半周的振幅大于第一个半周的振幅。

11.2.4 相速度的测量

用通常方法测量相速度的先决条件是，所考虑的波群是一种纯粹的单向波，其传播速度仅由频率确定。也就是说，假设该波群沿 X 轴的传播可表示为

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,\omega)|\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x}{c(\omega)}\right)+i\phi(\omega)\right]d\omega, \tag{11.10}$$

式中 $|f(x,\omega)|$ 是振幅谱密度，$\phi(\omega)$ 是除传播外其它因素产生的相位项，$c(\omega)$ 是相速度。传播产生的相位延迟 $\omega x/c(\omega)$ 可通过对地震图 Fourier 分析得到。(11.10)的 Fourier 变换可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\exp(i\omega t)dt=|f(x,\omega)|\exp\left[i\phi(\omega)+i\frac{\omega x}{c(\omega)}\right]. \tag{11.11}$$

测量距离为 x_1 和 x_2 的两台间相位谱之差 $[\omega/c(\omega)](x_1-x_2)\pm$

$2n\pi$，可得相速度 $c(\omega)$。不定整数 n 或用了解 $c(\omega)$ 前的近似值 α，或通过在两个以上台站所作的测量来加以确定。

现在讨论噪声对相速度测量精度的影响。假设地震图 $d(t)$ 由信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 组成，则

$$d(t)=s(t)+n(t). \tag{11.12}$$

把 $s(t)$ 的 Fourier 变换写作 $|S(\omega)|\exp[i\phi_s(\omega)]$，把 $n(t)$ 的 Fourier 变换写作 $|N_T(\omega)|\exp[i\phi_n(\omega)]$（信号持续时间为 $2T$），则 $n(t)$ 的功率谱密度 $P(\omega)$ 与 $N_T(\omega)$ 的关系为

$$P(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{|N_T(\omega)|^2}{2T}. \tag{11.13}$$

这可根据(10.25)以下列方式得到：

$$\begin{aligned}P(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\langle n(t)n(t+\tau)\rangle\exp(i\omega\tau)d\tau\\&=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}n(t)n(t+\tau)\exp(i\omega t)dtd\tau\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}n(t)\exp(-i\omega t)dt\int_{-\infty}^{\infty}n(t+\tau)\\&\qquad\times\exp[i\omega(t+\tau)]d\tau\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{N_T^*(\omega)N_T(\omega)}{2T}.\end{aligned} \tag{11.14}$$

地震图的 Fourier 变换 $D(\omega)$ 可写成

$$\begin{aligned}|D(\omega)|\exp[i\phi_d(\omega)]&=|S(\omega)|\exp[i\phi_s(\omega)]\\&\quad+|N_T(\omega)|\exp[i\phi_n(\omega)].\end{aligned} \tag{11.15}$$

当 $|N_T(\omega)|/|S(\omega)|$ 小的时候，可写出

$$\phi_d(\omega)\sim\phi_s(\omega)+\frac{|N_T(\omega)|}{|S(\omega)|}\sin[\phi_n(\omega)-\phi_s(\omega)]. \tag{11.16}$$

第二项是噪声引起的相位变化。若 $n(t)$ 与 $s(t)$ 不相关，$\phi_n-\phi_s$ 是从 0 到 2π 随机地、均匀地分布，则 $\phi_d(\omega)$ 的均方根变化等于

$$\Delta\phi_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|N_T(\omega)|}{|S(\omega)|}. \tag{11.17}$$

具有相同信号和噪声电平的两个台站间相位差的均方根误差是 $|N_T(\omega)|/|S(\omega)|$，因而相速度测量的均方根误差为

$$\frac{\Delta c_{RMS}}{c} = \frac{1}{2\pi} \frac{|N_T(\omega)|}{|S(\omega)|} \frac{\lambda}{\Delta x}, \tag{11.18}$$

式中 λ 是波长，Δx 是测量相位差的两个台站的距离。正如前一节所指出的，初动测量的误差可能只与信号振幅对数有关。但相速度测量的误差反比于信号振幅而减小，这是因为测量信号振幅使用了整个波形，而只有一位信息用于测量相速度。

11.2.5 相速度测量的精度——提高数据质量的一个实例

式(11.18)指出了改善地震相速度测量的两种基本方法：或提高信噪比，或减小与台站间距有关的波长。

改善精度的最简单方法看来是提高地震震源功率以加大信号振幅。误差会反比于震源强度而减小，但噪声——按我们的定义是数据中不需要的部分——可能随震源功率的增大而增加。如前所述，我们假设相速度测量中信号只是一种波，这样若其它波与数据同时存在，则必定被认为是噪声。若我们的信号是Rayleigh波的基阶振型，则 Rayleigh 波的所有高阶振型、体波，甚至那些由于横向不均匀性而传播方向不同的 Rayleigh 波基阶振型，都必然被当作噪声。显然，这些噪声随震源功率的增大而增加。所以，一旦噪声的主要部门变为是由这样的信号产生的，增大地震震源的功率就不可能进一步改善精度。

当震源和台站合理排列的情况下，通过增加观测结果的数目来进一步改善信噪比是可能的。若能使信号产生的噪声在这些测量结果中不相关，速度测量的误差会反比地随着测量结果的数目的平方根而减小。

当 Press(1956)第一次应用相速度法于加利福尼亚时，特别

注意选择低噪声 Rayleigh 波地震图。他使用了萨摩亚大地震的资料，地震波到加利福尼亚的路径大部分在深海内，几乎看不出多路径的干扰效应。他使用了三台法，即把三个台站测得的相位延迟时间结合起来，给出波到达的相速度和方位。虽然波长与其运行距离之比很小，约为 1，但信噪比比较好，能达到的精度约为1%。

利用日本气象厅管理的密集地震台网，安艺(Aki，1961)发现了在日本范围内的相速度有一个显著的变化。他把 50 个台站分为几个组，虽然波长近于或大于台站距离，但台站数量极大，使每组精度达到约 1.5%。

增加运行距离 Δx，牺牲空间分辨率，可以改善相速度测量的精度。在比较均匀的地区如地盾和深海底，有效地使用较长的运行距离，可得精确的相速度测量平均值。例如 Brune 和 Dorman(1963)应用双台站法，对加拿大地盾获取了很理想的结果。他们根据其震中位于连接两个接收台的大圆路径 4° 之间这样的地震的记录图得到了相速度。波长 λ 是 80—300 公里，台站距离 Δx 约为 3000 公里，这样比值 $\lambda/\Delta x$ 就是 1/40—1/10。方程(11.18)给出了相应的速度误差范围：

$$\frac{\Delta c}{c} \sim \frac{|N_r(\omega)|}{|S(\omega)|}(0.004-0.015). \tag{11.19}$$

根据测得的相速度对平均的平滑曲线的离散，他们估算了均方根误差约为 0.5%，它大体与波长无关。根据(11.19)，对这种相速度误差，最短波的信噪比必定是 1 左右，而最长波的信噪比一定是 3 左右。事实上，他们提出的周期小于 20 秒左右的面波振幅变得很小，或者相当不相干。在这样大的距离上这样短周期的相关是困难的。

在用三台法测量相速度时，若传播方向平行于三角网的一边，相速度的大小由此边两台间时间差确定，不受第三台站时间测量中微小起伏的影响。认识到这个事实，Knopoff 等(1967)根

据经验认为，在存在横向不均匀性的情况下，使相移误差达到极小这个问题里，双台法比三台法优越。Knopoff(1972)总结了广泛应用该方法于世界标准地震台网数据的结果。

双台法比三台法优越的另一证据可在波散射理论中找到。根据Chernov(1960)的文章，波在随机介质中传播的相位变化在平行于传播路径的方向上比在垂直于传播路径的方向上要大得多。

某些情况下，单台法可给出比双台法更好的结果。如果在方程(11.10)中计算 $\phi(\omega)$项所需震源参数已知的话，则单台法是可用的，并已成功地应用于世界各地区的很多地震。例如，Weidner(1974)证明，采用希腊地震和尼加拉瓜地震资料，应用双台法测定的穿过大西洋的相速度，与采用在大西洋两岸记录到的大西洋中洋脊地震资料应用单台法测定的相速度，两者吻合得很好，但前者的干涉效应比后者稍大。

(11.18)中出现的距离Δx(在 Weidner 的分析中)对双台法来说是整个大西洋的宽度，但对单台法来说只是此宽度的一半，因此根据式(11.18)我们可以期望前者的精度比后者好，但比率 $\lambda/\Delta x$ 在确定散射产生的相位起伏也是个关键因素。根据 Chervor的观点，对于用相关距离 a 表征的随机介质来说，相位的均方根起伏正比于$\sqrt{a\Delta x/\lambda}$，因此，横向不均匀性引起的这部分速度测量误差可能随比率 $\Delta x/\lambda$ 而增加。Brune 和 Dorman 观测到的加拿大地盾的极限值 $\Delta x/\lambda=40$，也可能是由于横向不均匀性的效应产生的。

虽然横向不均匀性产生的散射在限制长波速度测量的精度中是个重要的因素，但对很短的波，衰减也成了重要因素。为了通过测量当地的地震波速度以监测构造应力的变化，所需的精度可能是万分之一或更高。参照(11.18)可以让 $\lambda/\Delta x$ 变小而得到这个精度。因为一般实验中的距离可能是 $\Delta x\sim10$ 公里，为使 $\lambda/\Delta x$ 变小需要很高的频率，因而降低了信噪比并增加了速度测量误差，信号振幅在地壳浅部就会随距离衰减得很快，对这种情况的

唯一补救办法是增加地震震源功率，或者多次重复试验。

11.3 用于降低噪声的时间序列分析

如前节所述，在相速度测量的实例中，决定所给地震数据质量的最重要因素是信噪比，信号定义为数据中需要的部分，噪声定义为不需要的部分。在本节我们将讨论的情况里，数据是一个地震仪的输出，即为时间的单一函数。让我们先讨论反褶积技术

正如前节讨论过的，在某些假设和简化下，可把给出的地震图作为经过一系列逻辑块的输出，以脉冲响应函数表示每个逻辑块的影响 这样一个逻辑块的明显实例是地震仪 可以用下列四种方法中的任意一种，把这种仪器效应从记录中消除掉：

(i) 记录与地面运动的关系由微分方程 (10.2)或(10.63)表示。可用该方程的直接数值积分根据记录求出地面运动（要知道简单、稳定的方法，见 Bogdanov and Graizer, 1976)。

(ii) 取记录的 Fourier 变换，如 (10.5) 给出的那样。用地震仪的频率响应除它，然后计算该比率的 Fourier 逆变换

(iii) 把记录图和反滤波器的脉冲响应进行褶积，该脉冲响应是地震仪频率响应倒数的 Fourier 逆变换 [在(2)和(3)中都需要对 Fourier 变换进行平滑，因为地震仪频率响应的倒数可能在零频或无限大频率时变成无穷大，对标准地震仪如 (10.65) 和 (10.66) 所示。]

(iv) 如 11.3.4 节中所阐述的，应用递归滤波器。

一般，我们用一些逻辑块来描述对地震图的各种影响，而这些逻辑块没有一个简单的微分方程表示式。有些情况下，一个逻辑块可用于地震图的一小部分，若采用方法(ii)，人们可能不得不担心需要对哪一部分进行 Fourier 变换。如果采用(iii)，选择地震图合适部分的问题就不大。此外，随着快速 Fourier 变换

(FFT)方法的出现，第(ii)种方法的计算机时间比第(iii)种方法要少得多。

定义逻辑块的脉冲响应为 $g(t)$，Fourier 变换为 $G(\omega)$，则该逻辑块的输出 $d(t)$就表示为输入 $u(t)$和脉冲响应的褶积：

$$\begin{aligned} d(t) &= u(t) * g(t) \\ &= \int_0^{\infty} u(t-\tau) g(\tau) d\tau. \end{aligned} \qquad (11.20)$$

把 $u(t)$和 $d(t)$的 Fourier 变换分别写为 $U(\omega)$和 $D(\omega)$，得

$$D(\omega) = U(\omega) G(\omega), \qquad (11.21)$$

式中

$$D(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t) \exp(i\omega t) dt,$$

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(i\omega t) dt,$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(i\omega t) dt.$$

上述第(ii)种方法用下式根据输出复原输入：

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\omega)}{U(\omega)} \exp(-i\omega t) d\omega, \qquad (11.22)$$

第(iii)种方法引入反滤波器，其脉冲响应是

$$g^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{G(\omega)} d\omega,$$

并用反褶积复原输入

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t-\tau) g^{-1}(\tau) d\tau, \qquad (11.23)$$

11.3.1 面波

在线性弹性力学范围内，我们在第二章中已证明：在地球上一点得到的由任意地震震源产生的地震图可表达为源函数和适当 Green 函数的空间与时间褶积。当观测的波长远远大于震源-空间的尺度时，也就是说，当点源近似有效时，空间褶积就变得无效。这样，可把地震图表示为两个时间函数的褶积，一个代表源

函数，另一个代表Green函数。这样，可把源函数当作输入，把地震图当作只用波传播路径的特点表征的逻辑块的相应输出。在第七章中我们已进一步表明层状地球模型的Green函数可分解成简正振型和漏能模式，每种振型具有分别依赖于震源深度、传播距离、接收点深度等因子组成的表达式。因此，若能得到完全由一种单一振型组成的一部分地震图，就能把地震图表示为一连续系列逻辑块的输出，每个逻辑块分别代表不同因子的影响。在单一振型的情况下，即使震源尺度大于波长，只要震源和接收台站间的距离比震源线度大得多，有限震源大小的影响也能被分开，就如第十四章中讨论的那样。

于是，把观测的记录谱表示为震源-时间函数与震源的有限性、传播、衰减和记录等影响的乘积，这在面波地震学中是常见的。当从同一震源沿同一传播方向的两个台站上所得到的地震图来测量频谱时，把谱振幅之比归因于衰减，把相位差归因于传播产生的相位延迟，也是很常见的。必须注意，这两种做法只对单一振型组成的信号适用。同时存在的其它振型必须认为是噪声，它限制了这种分析结果的精度。

若能从观测地震图中分离出不同振型，就能消除这类噪声。若我们事先已知组成地震图的单个振型的特性，那么在某种程度上就能做到这种"振型分离"。若知道它们的群速度，在给定振型预计到达的时间间隔之外，除去无用的地震图部分。这种称为群速度窗的方法就是用集中在振型预期到达时间上的窗函数乘以数据。用于振型分离的群速度可直接用称为滑动窗分析的方法(Landisman *et al.*,1969)来测量。这方法是：用分辨率保持不变，而宽度随频率而变化的窗函数乘以连续地震图的各部分，估算在这些不同频率处的频谱幅度。

若不同振型间的偏振特性（三个分向位移之间的振幅-相位关系）是不同的，则该资料还可被用于设计窗口形状。使用这样的窗也可能使信号波形失真。由于它使波形失真的方式不仅取决

于窗的形状，也取决于未知信号形式，因此它对信号振幅和相位谱的影响一般无法预测。在11.5节中我们将介绍一种通过最大限度利用有关信号的先验知识把这种不希望出现的失真减到最小限度的方法。

另外一种分离不同振型的方法是把台阵各站的记录结合起来，利用相速度差消除不需要的振型。可采用直接进行频率——波数谱分析，或在信号和噪声的自相关和互相关函数的基础上进行多道滤波来达到分离振型的目的。这个问题将在11.4.3和11.5.3节中予以讨论。

11.3.2 体波

对于在远大于震源尺度的距离上观测到的体波，有理由可以用相似的震源路径分离加以解决。在分析远震体波时，通常认为地震图是一系列代表震源、接近震源的浅层结构、地球深处内部结构、近于接收点的浅层结构和记录仪器的逻辑块的输出。

接近震源的浅层结构的影响，可通过计算传播到浅层结构以下假想的均匀半空间的远场体波来近似。同样，接近接收点的浅层结构的影响，可用对于入射的平面P波、SV波或SH波的响应来近似。这些平面波的入射角可采用几何射线理论，根据深部结构计算得到。若深部结构本身对改变波形（如9.5节中所描述的绕射波的影响，则该影响也可再分解为附加的逻辑块。

对于在一层和平面SH波垂直入射最简单的情况下，和近于接收点的浅层结构有关地震图的第一次反褶积是由高桥和平野(Takahasi and Hirano,1941)作的，入射波形$u(t)$是根据地表的地震图$d(t)$，简单地应用下式得到的：

$$u(t)=\frac{1}{1-r}\left[d(t)-rd\left(t-\frac{2H}{\beta_1}\right)\right], \qquad (11.24)$$

式中$r=(\beta_1\rho_1-\beta_2\rho_2)/(\beta_1\rho_1+\beta_2\rho_2)$是反射系数，$(\beta_1,\rho_1)$和$(\beta_2\rho_2)$分别是地表层和基底层的剪切波速度和密度，$H$是层厚。在第十二章中我们将就一般情况求解这个问题，并作为一种特殊

情况导出上式。高桥和平野把式（11.24）应用于东京的两个台站上所得的地震图，一个台站在很松软的冲积层上，另一个在比较坚硬的地层上。图 11.6 表明反褶积处理成功地将两个地点明显不同的记录简化为几乎相同的入射波形。

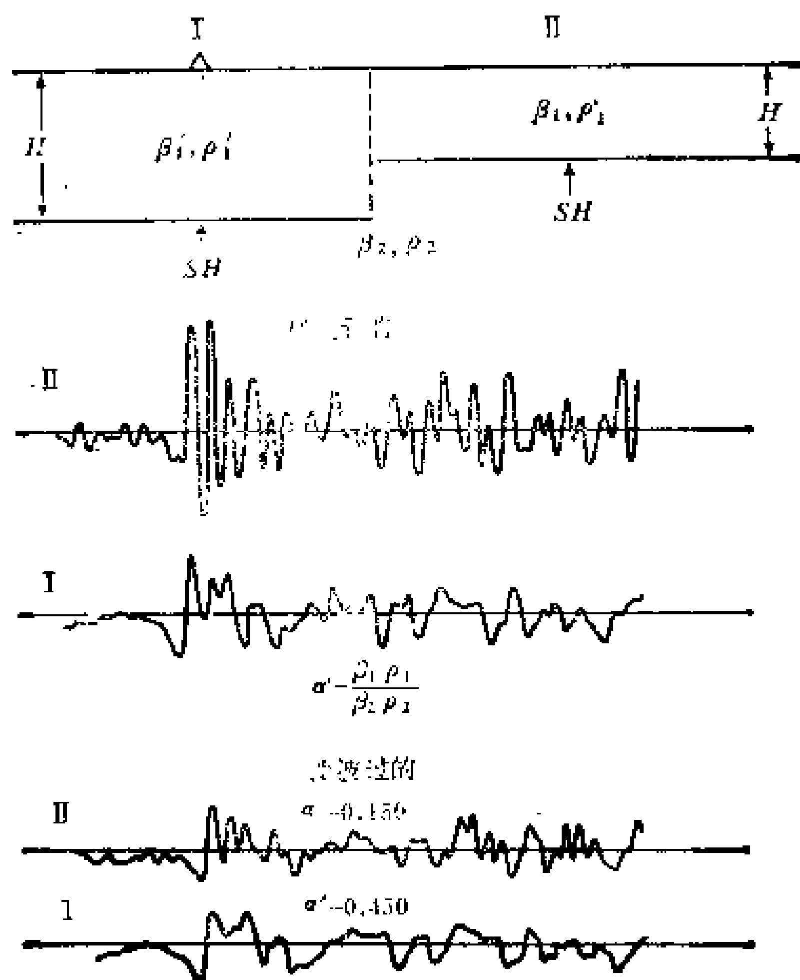


图 11.6

用简单的两点滤波函数(11.24)从地震图中消除了地表层影响。在两个具有不同分层的地点所记录的一次地震的地震图经过滤波后显示了相似性（引自 Takahasi and Hirano, 1941）

入射平面体波波形和地表地面运动的关系，就如同线性系统

的输入和输出的关系。根据高桥有成效的工作，金井及其同事们对与地震灾害问题特别有关的浅部层状构造的响应特性作了广泛的研究（Kanai and Tanaka，1961）。

11.3.3 反射地震图

在为石油勘探服务的反射地震学中，反褶积也是一种重要的数据处理技术。例如，一爆破震源位于某一深处，则起初向上传播的波在自由地表或其它反差很大的浅层分界面发生反射。这些反射波跟随原生的下行波，随后显示为虚反射，降低了反射地震图的分辨率。这种影响可近似为虚震源产生的反射地震图的延迟迭加。最后的地震图可表示为一次反射地震图和一系列实震源和虚震源的褶积，这种影响可用反褶积来消除。

另一实例是在水下反射测量时低速层(如水层)的混响。平面波从下往这层入射时，入射波形和地表运动的关系就如式(11.24)所示的为一线性滤波器的输入-输出。

假设从较深层反射回的波是平面波，则水层就起线性滤波器的作用。但除此之外，还存在着穿透到更深处去前在水层中已多次反射的波和从较深层反射回水层然后又向下反射的波。该过程的完整分析见12.2节。简单的反褶积只能粗略地消除水层的效应，这里只说明这点就足够了。消除水层后所预期的反射地震图与观测到的反射地震图的关系不象其特性完全由水层确定的线性滤波器的简单的输入-输出关系。

为了消除虚反射或混响，计算反褶积滤波函数需要有关浅层参数的准确资料，但实际上这种资料可能是不易得到的。Robinson(1957，1966)发展了一种不了解这些参数时也可应用的方法。他假设，在没有诸如虚反射和混响的影响时，该反射系列是具有δ函数自相关的一个随机尖峰系列，当这一尖峰系列是输入时，观测地震图是线性滤波器的输出。地震图的自相关函数是滤波-频率响应绝对值平方的Fourier逆变换。若在上ω平面上，频率响应函数没有零，则用补充5.8中的式(15)，根据滤波响应绝对值

可得到其相位特性。如补充 5.8 中所讨论的，这相应于最小延迟系统。假定滤波器有最小延迟，则可确定其响应函数及反褶积滤波器的响应函数 实际上是通过解 11.3.6 节讨论过的线性方程(11.56)，在时间域内确定滤波器的系数。这种方法虽然基于大胆的假设和近似基础上，但在实际中却很起作用。

11.3.4 数字滤波

实践中，现在通常对数字化数据进行滤波。如 11.2 节所述，将地震图 $d(t)$ 在相等的间隔 Δt 上数字化。为了避免混淆现像发生，间隔 Δt 选得小于 $1/2W$，这里 W 是包含在数据里的最大频率(赫)。

作为(11.21)中 Fourier 变换 $D(k\Delta\omega)$ 的近似值，我们定义离散的 Fourier 变换 D_k 为

$$D_k = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \exp(ik\,\Delta\omega n\,\Delta t)\Delta t \quad (k=0,1,\ldots,N-1), \tag{11.25}$$

式中 $\Delta\omega = 2\pi/(N\Delta t)$。对于实 d_n，D_k 是复数，D_{N-k} 是 D_k 的复共轭。离散 Fourier 逆变换由下式给出：

$$d_m = \sum_{k=0}^{N-1} D_k \exp(-ik\,\Delta\omega m\,\Delta t)\,\frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (m=0,1,\ldots,N-1), \tag{11.26}$$

式中 $\Delta\omega = 2\pi/(N\Delta t)$。

虽然 d_n 和 D_k 是对连续 Fourier 变换对的近似，当(11.25)有效时，逆关系式(11.26)确实成立，因为表达式

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp(ik\Delta\omega\cdot n\Delta t - ik\Delta\omega\cdot m\Delta t) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left\{i\left[\frac{2\pi(n-m)k}{N}\right]\right\}$$

在 $m=n$ 时等于N，否则为零。

下面讨论两个离散 Fourier 变换 D_k 和 F_k 之积。D_k 和 F_k 由下式可得：

$$D_k = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \exp(ik\Delta\omega \cdot n\Delta t)\Delta t$$

$$(11.27)$$

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp(ik\Delta\omega \cdot n\Delta t)\Delta t \quad (k = 0, 1, \cdots, N-1).$$

以类似于对连续函数褶积的方式，将 d_n 和 f_n 的褶积定义为 D_k 和 F_k 乘积的 Fourier 逆变换：

$$u_l = \sum_{k=0}^{N-1} D_k \cdot F_k \exp(-ik\Delta\omega \cdot l\Delta t)\frac{\Delta\omega}{2\pi}. \quad (11.28)$$

以(11.27)的逆变换代入上式，得

$$u_l = \sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} d_n \exp(ik\Delta\omega \cdot n\Delta t)\Delta t\right]$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp(ik\Delta\omega \cdot m\Delta t)\Delta t \exp(-ik\Delta\omega l\Delta t)\frac{\Delta\omega}{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} d_n f_m \left\{\sum_{k=0}^{N-1} \exp[ik\Delta\omega(m+n-l)\Delta t]\right\}\Delta t,$$

$$(11.29)$$

当 $m+n-l$ 是零或 N 的整数倍($\pm$)时，

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp[ik\Delta\omega(m+n-l)\Delta t]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(ik\,2\pi\frac{m+n-l}{N}\right)$$

等于N，否则为零。于是我们有

$$u_l = \sum_{m=0}^{N-1} d_{(l-m)} f_m \Delta t, \quad (11.30)$$

这称为圆周褶积 (Gold and Rader, 1969).

在上式中，若 $0\le l-m<N$，则符号 $(l-m)$ 表示 $l-m$；若 $-N\le l-m<0$，则 $(l-m)$ 表示 $l-m+N$. 由于定义(11.26)中暗指的周期性，在 $0\le n<N$ 范围中给出函数 d_n 的尾部显示在以 $n=0$ 开始的信号的前头. 通过增加 N，从而在 u_n 和 f_n 的尾部增加了可能需要的很多零，则此问题就很容易解决.

做了这些准备工作后，让我们讨论数字数据 $d_m(m=1,2,\cdots,N-1)$ 的三种基本滤波方法：(i) 褶积；(ii) 快速 Fourier 变换 (FFT)；(iii)递归.

假设滤波器的脉冲响应已知为 $f_i(i=0,1,\cdots,M-1)$，最简单的方法自然是褶积：

$$u_l=\sum_{m=0}^{M-1} d_{l-m} f_m \Delta t \quad (l=1,\cdots,N-1). \tag{11.31}$$

然而该运算要求 $M\times N$ 次乘法和加法. 若我们能用圆周褶积(11.30)代替上述运算，为避免周期性问题，使用 FFT 可大大减少乘法和加法的次数。正如我们在下一节将阐述的，可用约 $N\log_2 N$ 次加法和少于 $(N/2)\log_2 N$ 次乘法计算出离散 Fourier 变换(11.25). 如(11.29)中所示，圆周褶积可通过(i)计算两次 FFT；(ii)求出这两次 FFT 的 N 次积；(iii)计算一次逆 FFT. 加法的总次数约为 $3N\log_2 N$，乘法的总次数则少于 $N\left(1+\frac{3}{2}\log N\right)$。因而，若滤波器脉冲响应的长度 M 大于 $\left(1+\frac{3}{2}\log_2 N\right)$ 则采用 FFT 法比在时间域里直接褶积节约时间。比如，若 $N=1024$，则当 $M>16$ 时，建议用 FFT 法.

当滤波器的频率响应已知为 $F_i(i=0,1,\cdots,N-1)$，自然最好用 FFT. 这种情况下该运算只需要进行一次 FFT，N 次乘法和一次逆 FFT.

某些情况下，递归法相当有效地给出理想的结果。例如，消

除11.3.2节中所提及的地表层影响的方法只用了如(11.24)所示的两点滤波器($M=2$)。一般可将滤波器写为

$$u_n+\sum_{k=1}^{M_1}a_k u_{n-k}=\sum_{l=0}^{M_2}b_l d_{n-l} \tag{11.32}$$

滤波器的输出 u_n 表达为在 M_1 个时间点上过去的输出值与在 M_2 个时间点上现在和过去的输入值的线性组合。由于这一公式，在任一非零输入作用之前输出将为零。这样的滤波器称为物理上可实现的或因果的滤波器，频率响应函数在 ω 平面的上半部分没有极点。令 $d_n=D(\omega)\exp(-i\omega n\Delta t)$，$u_n=U(\omega)\exp(-i\omega n\Delta t)$，可得到上述滤波器的频率响应 $F(\omega)$ 为

$$F(\omega)=\frac{U(\omega)}{D(\omega)}=\frac{\sum_{l=0}^{M_2}b_l\exp(i\omega l\Delta t)}{1+\sum_{k=1}^{M_1}a_k\exp(i\omega k\Delta t)}. \tag{11.33}$$

用 $z=\exp(i\omega\Delta t)$把变量 ω 变为 z 是很方便的，因而

$$F(z)=\frac{\sum_{l=0}^{M_2}b_l z^l}{1+\sum_{k=1}^{M_1}a_k z^k}. \tag{11.34}$$

若把Z扩展到复数值，则可发现，由于对实 ω 有$|\exp(i\omega\Delta t)|=1$，因此 ω 复平面的实数轴相应于 z 平面的单位圆。给定的 ω 相应于相角为 $\omega\Delta t$ 处单位圆上的一点。$F(z)$的绝对值可具体化为：从那一点到多项式 $\Sigma b_l z^l$ 所有的根之间的离距之积除以从同一点到多项式 $1+\Sigma a_k z^k$ 所有的根之间的距离之积；而$F(z)$的相角可具体化为：从单位圆上的一点到 $\sum b_l z^l$ 的所有的根测得的相角和从同一点到 $1+\sum a_k z^k$ 的所有根测得的相角之差。借助于这种几何解，就能构成具有指定特性的滤波器。（试解问题11.3）若达到给定目的仅需要 M_1+M_2 个这样少量的系数，则这种方法比FFT方法更有效。

11.3.5 快速 Fourier 变换

时间序列 $d_k(k=0,1,2,\cdots,N-1)$ 的离散 Fourier 变换由 (11.25)定义为

$$D_j=\sum_{k=0}^{N-1} d_k \exp(ij\Delta\omega k\Delta t)\Delta t \quad (j=0,1,\cdots,N-1),$$

式中$\Delta\omega=2\pi/(N\Delta t)$。令 $E=\exp(2\pi i/N)$，可写出

$$D_j=\sum_{k=0}^{N-1} d_k E^{jk}, \tag{11.35}$$

式中为方便起见省略了比例因子 Δt。

在 Cooley 和 Tukey(1965)介绍的 FFT 计算中，我们假设资料点的数目 N 是 2 的整数幂：

$$N=2^m. \tag{11.36}$$

对地震学中经常遇到的瞬时信号来说，这不是个限制性的条件，因为人们可以在记录的头部或尾部增加任意个零。Gold 和 Rader (1969)在其所著的有关数字化处理的教科书中，对 FFT 算法的几种变化，包括应用不是 2^m 的资料点数的 FFT 算法作了综述。

任一整数 k，$0\leqslant k<N=2^m$，可被表达为一个二进位数，

$$k=k_0+k_1\cdot 2+\cdots+k_{m-1}\cdot 2^{m-1},$$

这里 k_i 取值 0 或 1 。

同样，一个整数 j，$0\leqslant j<2^m$，可被表达为

$$j=j_0+j_1\cdot 2+\cdots+j_{m-1}\cdot 2^{m-1}.$$

这样式 (11.35)可改为

$$D_j=D(j_{m-1},j_{m-2},\cdots,j_0)$$

$$=\sum_{k_0=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1}\cdots\sum_{k_{m-1}=0}^{1} d_k E^{(\sum_{r=0}^{m-1}k_r\cdot 2^r)(\sum_{s=0}^{m-1}j_s\cdot 2^s)}. \tag{11.37}$$

对每个 k_r 取 0 和 1 求和。由于$2^m=N$，$E^N=1$，我们便有

$$E^{(\sum_{r=0}^{m-1}k_r 2^r)(\sum_{s=0}^{m-1}j_s 2^s)}=E^{(\sum_{r=0}^{m-1}k_r 2^r\sum_{s=0}^{m-r-1}j_s 2^s)}. \tag{11.38}$$

把(11.38)代入(11.37)，并令 $d_k=d(k_{m-1},k_{m-2},\cdots,k_0)$，则可把(11.37)改写成

$$D(j_{m-1}, j_{m-2}, \cdots, j_0)$$

$$= \sum_{k_0} E^{(k_0 \Sigma_0^{(m-1)} j_s 2^s)} \sum_{k_1} E^{(k_1 \cdot 2 \cdot \Sigma_0^{(m-2)} j_s 2^s)}$$

$$\cdots \sum_{k_r} E^{(k_r \cdot 2^r \cdot \Sigma_0^{(m-r-1)} j_s 2^s)}$$

$$\cdots \sum_{k_{m-1}} E^{(k_{m-1} \cdot 2^{m-1} \cdot j_0)} d(k_{m-1}, k_{m-2}, \cdots, k_0). \quad (11.39)$$

上述运算可用下列递归关系式来完成：

$$d(j_0, j_1, \cdots, j_{m-r-1}, k_{r-1}, \cdots, k_0)$$

$$= \sum_{k_r} E^{(k_r 2^r \Sigma_{s=0}^{m-r-1} j_s 2^s)} d(j_0, j_1, \cdots, j_{m-r-2}, k_r, \cdots, k_0).$$

(11.40)

从 $d(k_{m-1}, \cdots, k_0)$ 开始，使用(11.40)对 k_{m-1} 求和以获取 $d(j_0, k_{m-2}, \cdots, k_0)$，然后用(11.40)对 k_{m-2} 求和 $d(j_0, k_{m-2}, \cdots k_0)$，得 $d(j_0, j_1, k_{m-3}, \cdots, k_0)$。如此直至得到等于 $D(j_{m-1}, j_{m-2}, \cdots, j_0)$ 的 $d(j_0, j_1, \cdots, j_{m-1})$：

$$D(j_{m-1}, j_{m-2}, \cdots, j_0) = d(j_0, j_1, \cdots, j_{m-1}). \quad (11.41)$$

于是对递归公式（11.40）进行m步运算，最后倒换自变数的二进位数字的次序，计算出 FFT。

下面叙述一下$m = 3$ 情况下的该过程。由(11.40) 给出 的第一步是

$$\text{(i)} \quad d(j_0, k_1, k_0) = \sum_{k_2=0}^{1} E^{k_2 4 j_0} d(k_2, k_1, k_0)$$

$$= E^0 d(0, k_1, k_0) + E^{4j_0} d(1, k_1, k_0).$$

第二步产生

$$\text{(ii)} \quad d(j_0, j_1, k_0) = \sum_{k_1=0}^{1} E^{k_1 2(j_0 + j_1 2)} d(j_0, k_1, k_0)$$

$$= E^0 d(j_0,0,k_0) + E^{2(j_0+j_1 2)} d(j_0,1,k_0).$$

第三步给出

$$\text{(iii)}\quad d(j_0,j_1,j_2)=\sum_{k_0=0}^{1} E^{k_0(j_0+j_1 2+j_2 4)} d(j_0,j_1,k_0)$$

$$=E^0 d(j_0,j_1,0)+E^{(j_0+j_1 2+j_2 4)} d(j_0,j_1,1).$$

然后得出最终结果：

(iv) $D(j_2,j_1,j_0)=d(j_0,j_1,j_2)$.

图11.7从左至右表示上述步骤。最左边，$d_k=d(k_2,k_1,k_0)$按位的反向次序排列。这种自变数次序在整个这组步骤中保持不变。标有E的幂的箭头表示每步的结果。例如在第一步中$E^0d(0,0,0,)$加$E^4d(1,0,0,)$会产生新的$d(1,0,0)$。由于第一步完成后

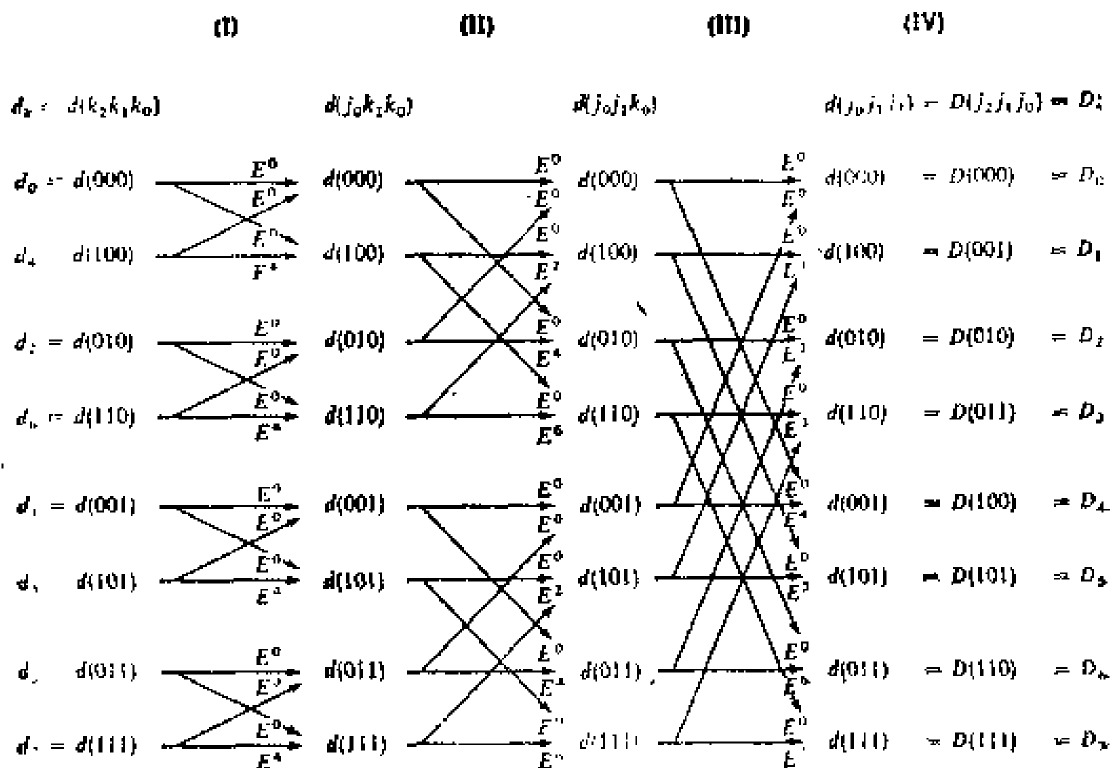


图 11.7

当数据长度为$2^3=8$时，快速 Fourier 变换(FFT)的第一到第五步

计算中不再需要 $d(k_2,k_1,k_0)$，就可从存储该数的计算机存储器中抹去它，存储 $d(j_0,k_1,k_0)$。第三步完成后，自变数的二进位数字次序反转，产生最终结果。

因为 $E=\exp(2\pi i/N)$，$N=2^3=8$，E^0 为1，E^4为-1，因此如图 11.7 所示，第一步不包括乘法，而只包括四次加法和减法。第二步包括四次乘法和与第一步同样多次数的加法和减法。第三步包括六次乘法和与前几步总次数同样多次的加法和减法。根据这个结果可预知，正如在11.3.4节中所谈及的，加法和减法的总次数是$N\log_2 N$。用(11.35)直接进行计算需要 N^2 次乘法和加法。这表明 FFT 比普通方法快了 $N/\log_2 N$ 倍。当$N=1024=2^{10}$时，比率 $N/\log_2 N$ 为100；$N=16384=2^{14}$时，该比率则为1000。在图11.8中表示的是 Cooley 等(1969)用 FORTRAN 语言

```
      SUBROUTINE FFT(A,M)
      COMPLEX A(1024),U,W,T
      N = 2**M
      NV2 = N/2
      NM1 = N-1
      J = 1
      DO 7 I = 1, NM1
      IF(I.GE.J) GO TO 5
      T = A(J)
      A(J) = A(I)
      A(I) = T
5     K = NV2
6     IF(K.GE.J) GO TO 7
      J = J-K
      K = K/2
      GO TO 6
7     J = J+K
      PI = 3.14159265358979
      DO 20 L = 1,M
      LE = 2**L
      LE1 = LE/2
      U = (1.0,0.)
      W = CMPLX(COS(PI/LE1),SIN(PI/LE1))
      DO 20 J=1, LE1
      DO 10 I = J,N,LE
      IP = I+LE1
      T = A(IP)*U
      A(IP) = A(I)-T
10    A(I) = A(I)+T
20    U = U*W
      RETURN
      END
```

图 11.8

用 FFT 法计算 DFT 的程序（根据 Cooley 等1969年编制的程序）

编制的一个完整可用的 FFT 程序。

11.3.6 平稳时间序列

本节中我们将讨论地震噪声的随机模型。我们首先将产生白噪声，即遵循 Gauss 分布的统计变量随机序列，然后，把11.3.4节中讨论的线性数字滤波器应用于白噪声，即可产生地震噪声的模型。

设 x 为一统计变量，它遵循具有均值 m 和方差 σ^2 的Gauss分布，概率密度函数 $f(x)$ 由下式给出：

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]=N(m,\sigma^2). \quad (11.42)$$

相应的矩生成函数 $\phi(\theta)$ 为

$$\phi(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}f(x)dx=\exp\left[\frac{1}{2}(\theta^2\sigma^2)+\theta m\right]. \quad (11.43)$$

根据定义 $\phi(\theta)$给出了矩：

$$\phi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1,$$

$$\left.\frac{d\phi}{d\theta}\right|_{\theta=0}=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\langle x\rangle,$$

$$\left.\frac{d^2\phi}{d\theta^2}\right|_{\theta=0}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\langle x^2\rangle.$$

对于 Gauss 分布，

$$\langle x\rangle=(\theta\sigma^2+m)\phi|_{\theta=0}=m,$$

$$\langle x^2\rangle=\{\sigma^2+(\theta\sigma^2+m)^2\}\phi|_{\theta=0}=\sigma^2+m^2.$$

考虑两个变量 x_1 和 x_2，每个都分别独立地遵循 Gauss 分布 $N(m_1, \sigma_1^2)$和$N(m_2, \sigma_2^2)$。和式 x_1+x_2 处于 x 与 $x+dx$ 之间的几率由下式给出：

$$f(x)dx=\iint_{x<x_1+x_2<x+dx}f_1(x_1)f_2(x_2)dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - x_1) f_2(x_1) dx_1 dx. \qquad (11.44)$$

由于上述运算是一褶积，因此相应的矩生成函数(正如Fourier变换一样) 满足下列关系式：

$$\phi(\theta) = \phi_1(\theta)\phi_2(\theta)$$
$$= \exp\left[\frac{1}{2}\theta^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \theta(m_1 + m_2)\right]. \qquad (11.45)$$

这与Gauss分布 $N(m_1 + m_2, \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 是一致的，因而两个Gauss变量之和遵循Gauss分布。和的平均值等于平均值的和，和的方差等于方差的和。

假定 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是从遵循Gauss分布 $N(m, \sigma^2)$的总体中取的 n 个独立采样，则 $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 将遵循Gauss分布 $N(nm, n\sigma^2)$。因为$\langle x \rangle$是$\langle x/n \rangle$的 n 倍，$\langle x^2 \rangle$ 是 $\langle (x/n)^2 \rangle$的 n^2 倍，所以采样平均离散的方差反比于采样大小 n。

同样，x 的任意线性组合 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n$ (其中 a 为常数) 也遵循高斯分布

$$N(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)m, \ (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\sigma^2).$$

让我们定义离散白噪声$x_t(t = \cdots, 0, 1, 2 \cdots)$是从Gauss总体$N(0, \sigma^2)$所取独立采样的一个无限序列。若取白噪声的有限长度$N\Delta t$，且用(11.25)计算离散Fourier变换，则得

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(ik\Delta\omega \cdot n\Delta t)\Delta t \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \qquad (11.46)$$

式中$\Delta\omega = 2\pi/(N\Delta t)$。把它分成实数和虚数两部分，则有

$$X_k = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\frac{2\pi kn}{N} + i\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\frac{2\pi kn}{N}\right)\Delta t. \qquad (11.47)$$

x_k 的绝对值平方为

$$|X_k|^2 = \left(\Delta t\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\frac{2\pi kn}{N}\right)^2 + \left(\Delta t\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\frac{2\pi kn}{N}\right)^2.$$

(11.48)

实数和虚数部分都是 x_n 的线性组合. 每部分都遵循 Gauss 分布. 它们的平均值都是零, 余弦和的方差及正弦和的方差分别为

$$\sigma^2\Delta t^2\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2\frac{2\pi kn}{N} \text{ and } \sigma^2\Delta t^2\sum_{n=0}^{N-1}\sin^2\frac{2\pi kn}{N}.$$

这样, 利用(11.48), 我们有

$$\langle|X_k|^2\rangle=\sigma^2\Delta t^2\sum_{n=0}^{N-1}\left(\cos^2\frac{2\pi kn}{N}+\sin^2\frac{2\pi kn}{N}\right)=N\sigma^2\Delta t^2. \tag{11.49}$$

$\langle|x_t|^2\rangle$ 是第 k 个 Fourier 分量所具能量的量度. 如(11.49)所示, 该估算值随记录长度 $N\Delta t$ 递增, 因此通过用时间长度 $N\Delta t$ 除能量并使 N 足够大, 我们可确定离散功率谱 P_k:

$$P_k=\lim_{N\to\infty}\frac{\langle|X_k|^2\rangle}{N\Delta t}=\sigma^2\Delta t. \tag{11.50}$$

这样, 白噪声的功率谱是个与频率无关的常数, 而且(11.50)与 x_t 的自相关的离散 Fourier 变换一致, 对零滞后的 x_t 的自相关为 σ^2, 其余为零。

做了这些准备工作后, 现在我们让离散白噪声通过数字滤波器以建立一个地震噪声模型。把滤波器的脉冲响应称为 f_t, 其离散 Fourier 变换称为 F_k, 这样, 噪声 n_t 可用褶积表示为

$$n_t=\sum_i x_{t-i}f_i\Delta t, \tag{11.51}$$

或用相应的功率谱 $P_k^{(n)}$, 即第 k 个频率中每个单位时间内的能量来表示如下:

$$P_k^{(n)}=\lim_{N\to\infty}\frac{\langle|X_K\cdot F_K|^2\rangle}{N\Delta t}=\sigma^2|F_k|^2\Delta t. \tag{11.52}$$

噪声 n_t 的功率谱密度就是白噪声谱密度与滤波器脉冲响应的离散 Fourier 变换的绝对值平方之积。

根据(11.51), 自相关函数 $r_k=\langle n_t n_{t+k}\rangle=\langle n_t n_{t-k}\rangle$ 可写为

$r_k=\sum_i\sum_j\langle x_{i-i}x_{j+k-j}\rangle f_i f_j(\Delta t)^2$。因为当 $k=0$ 时，$\langle x_i x_{i+k}\rangle=\sigma^2$，其余为零，所以除 $j-i=k$ 外，$\langle x_{i-i},x_{i+k-j}\rangle$为零．这样，我们有 $r_k=\sigma^2(\Delta t)^2\sum_i f_i f_{i+k}$。另一方面，$|F_k|^2$ 的离散 Fourier 变换等于 $\sum_i f_i f_{i+k}\Delta t$，因为

$$|F_k|^2=F_kF_k^*$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{N-1}f_n\exp(ik\Delta\omega n\Delta t)\Delta t\right)\left(\sum_{n'=0}^{N-1}f_{n'}\exp(-ik\Delta\omega n'\Delta t)\Delta t\right),$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}|F_k|^2\exp(-ik\Delta\omega m\Delta t)\frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{n'=0}^{N-1}f_nf_{n'}(\Delta t)^2\frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\exp[ik\Delta\omega(n-m-n')\Delta t]$$

$$=\sum_{n'=0}^{N-1}f_{n'}f_{(n'+m)}\Delta t,$$

式中若 $0\leqslant n'+m\leqslant N-1$，则$(n'+m)=n'+m$；若是 $0\leqslant n'+m-N\leqslant N-1$，则$(n'+m)=n'+m-N$。按照(11.30)定义的圆周褶积，可将这称为“圆周自相关”。将(11.52)与自相关 r_k 的表达式相比较，发现

$$r_m=\sum_{k=0}^{N-1}P_k^{(n)}\exp(-ik\Delta\omega m\Delta t)\frac{\Delta\omega}{2\pi}.$$

尤其是噪声功率表达为

$$\langle n_i^2\rangle=r_0=\sum_{k=1}^{N-1}P_k^{(n)}\frac{\Delta\omega}{2\pi},$$

证实 $P_k^{(n)}$ 的名称叫作功率谱密度．

由于 f_k 和 F_k 都被认为是周期性的，其周期为 N，因此

$$f_k=f_{N+k}\text{ 和 }F_k=F_{N+k}.$$

此外，r_k 和$|F_k|^2$ 对 k 都是偶函数，因而

$$r_k=r_{N-k}\text{ 和 }|F_k|^2=|F_{N-k}|^2.$$

由于这个特点，当 $m<N/2$，频率 $(N-m)\Delta\omega$ 应被认为是 $-m\Delta\omega$

用递归公式(11.32)，对于白噪声 x_i 滤波：

$$n_i+\sum_{m=1}^{M1} a_m n_{i-m}=\sum_{l=0}^{M2} b_l x_{i-l}。\qquad (11.53)$$

上式定义的输出 n_i 的功率谱密度由下式给出：

$$P_k^{(n)}=\sigma^2\cdot\frac{\Delta t\left|\sum_{l=0}^{M_2} b_l\exp(ikl\Delta\omega\Delta t)\right|^2}{\left|1+\sum_{m=1}^{M_1} a_m\exp(ikm\Delta\omega\Delta t)\right|^2}。\qquad (11.54)$$

下面讨论一特殊情况 $M_2=0$。令 $M_1=M$，$b_0=0$，我们有

$$n_i+\sum_{m=1}^{M} a_m n_{i-m}=x_i。\qquad (11.55)$$

由上式定义的时间序列 n_i 称为自回归(Word,1938)。从白噪声输入产生 n_i 的滤波器有频率响应 $(1+\sum_{m=1}^{M} a_m\exp(ikm\Delta\omega\Delta t))^{-1}$。由于这响应在 ω 平面的上半部没有零点和极点，因此滤波器有最小延迟(补充 5.8)。如补充 5.8 所述，最小延迟滤波器的相位响应可从其振幅响应求得。换言之，滤波器总响应可只根据功率响应求得。

11.3.3 节中讨论过的反射地震图的 Robinson 模型精确地为(11.55)定义的自回归时间序列。Robinson 的反褶积过程是用(11.55)从反射地震图 n_i 求白噪声 x_i。因为滤波器具有最小延迟，所以可从自相关函数求滤波器系数 a_i，如下所述，这自相关函数只包括振幅信息。

由于 x_i 是纯随机的，因而 x_i 现在的值与 n_j 过去的值无关。换言之，当 $j<i$ 时，相关 $\langle x_i n_j\rangle=0$。将(11.55)的两边乘以 n_j 并求平均值，我们有

$$\langle n_j n_i \rangle + \sum_{m=1}^{M} a_m \langle n_j n_{i-m} \rangle = 0, \quad j < i. \qquad (11.56)$$

用自相关函数 r_k，把(11.56)改写成

$$\sum_{m=1}^{M} a_m r_{k-m} = -r_k, \quad (k=1,2,\cdots,M)$$

或

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{M-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & \\ \vdots & r_1 & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & r_1 \\ r_{M-1} & \cdots & r_1 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix}.$$

具有上述 $M \times M$ 带状结构的矩阵称为Toeplitz 矩阵；11.3.8节中将提出解上述方程的快速递归法。这样，已知自相关函数，(11.55)中的滤波器系数可用上式确定。上式可改写成

$$\begin{pmatrix} r_0 & \cdots & r_M \\ \vdots & r_0 & \\ \vdots & & \ddots \\ r_M & & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (11.57)$$

式中 $\alpha = r_0 + r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_M a_M$。用 n_i 乘以(11.55)的两边并求平均值，则求得 $\alpha = \langle n_i x_i \rangle$。另一方面，由于 x_i 是纯随机的，当 $j<i$ 时，$\langle x_i n_j \rangle = 0$。然后，用 x_i 乘(11.55)的两边并求平均值，则得出

$$\langle n_i x_i \rangle = \langle x_i^2 \rangle = \sigma^2.$$

也就是说，α 是白噪声的方差。通过对 $(n_i + \sum_{m=1}^{M} a_m n_{i-m})$ 的均方值对 a_i 求极小，可以得到式(11.57)的 a_i。这是因为去掉任何系统的可预测部分，最小二乘方残差可以被认为是随机化了的。该最小均方值等于 α。

11.3.7 功率谱的测量

现在讨论当噪声数据 $n_i (i=0, 1, \cdots, N-1)$ 的长度 $N\Delta t$ 已

知时估算功率谱的问题。n_k 的离散 Fourier 变换可写作

$$N_k = F_k X_k, \tag{11.58}$$

式中 F_k 是数字滤波器的频率响应，X_k 是白噪声 x_k 的离散 Fourier 变换。请注意，因为 X_k 是个统计变量，所以 N_k 也是个统计变量。取 N_k 的绝对值平方并采用(11.48)，可写出

$$|N_k|^2 = |F_k|^2 \left[\left(\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \frac{2\pi k n}{N}\right)^2 + \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin \frac{2\pi k n}{N}\right)^2\right]. \tag{11.59}$$

( )中每一项是 x_n 的线性组合，因而遵循 Gauss 分布。它们的平均值为零，当 N 很大时，如(11.49)所示，正弦项和余弦项具有同一方差 $N\sigma^2\Delta t^2/2$。

由于 $|N_k|^2$ 是两个 Gauss 变量平方之和，相对于该方差的归一化值为

$$\chi_2^2 = \frac{2|N_k|^2}{|F_k|^2 N\sigma^2\Delta t^2}, \tag{11.60}$$

服从具有两个自由度的 χ^2 分布。

一般说，服从具有 n 个自由度的 χ^2 分布的 χ_n^2 平均值是 n。χ_n^2 的均方根离其均值的偏差是 $\sqrt{2n}$，因而均方根误差对均值之比是 $\sqrt{2}/\sqrt{n}$，当 $n=2$ 时，该比大到 1。

通过对相邻频率求平均，可减小估算 $|N_k|^2$ 的这种误差。取 $2m$ 个相邻点的和并假设在这些点上 $|F_k|^2$ 变化缓慢，则

$$\chi_{2(2m+1)}^2 = \frac{2\sum_{l=-m}^{m} |N_{k+l}|^2}{|F_k|^2 N\sigma^2\Delta t^2}. \tag{11.61}$$

将服从具有 $2(2m+1)$ 个自由度的 χ^2 分布，因此 $\chi^2_{2(2m+1)}$ 的相对均方根误差，即 $\chi^2_{2(2m+1)}$ 的均方根偏差对其均值之比，为 $1/\sqrt{2m+1}$。这同样的相对均方根误差可用于在 $2m+1$ 点上平滑

后的功率谱估算(11.52)，

$$\frac{1}{N\Delta t}\cdot\frac{1}{2m+1}\sum_{l=-m}^{m}|N_{k+l}|^2.$$

对一给定的相对误差 $\varepsilon=1/\sqrt{2m+1}$，谱估算值必须在频率间隔 $\pm\Delta f$ 上平滑，这里

$$\Delta f=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{m+\frac{1}{2}}{N\Delta t}=\frac{1}{2N\Delta t\varepsilon^2}. \quad (11.62)$$

对稳定的功率谱估算值，ε 必须很小，必须在较宽频率范围上平滑估算值．估算值可靠性的提高是以牺牲频率分辨率为代价的。对一给定的可靠性，频率分辨率随记录长度线性地提高。另一方面，对一给定频率分辨率，估算精度随记录长度的平方根线性地提高．

对一给定的记录长度 $N\Delta t$，可分辨频宽的最高限度为 $\Delta\omega=2\pi/(N\Delta t)$．但是，若时间序列是如(11.55)定义的自回归型，就可能达到超出此限度的分辨率。产生自回归时间序列的滤波器特性由少量滤波器系数 $a_i(i=1,\cdots,M)$ 来确定。进而，根据 k 只从 0 到 $M-1$ 时的自相关函数 $r_k=\langle n_j n_{j+k}\rangle$ 的有限部分，由(11.57)就能定出滤波器系数。一旦确定了 a，功率谱就可以用(11.54)计算出来，对于自回归时间序列，该式中 $M_2=0$。

讨论如下实验可使上述过程的形象更具体：首先，令噪声 n_i 通过滤波器并测定输出，以这样方式测定滤波器系数，以使输出 x_i 成白的或纯随机化的，或在最小二乘方意义上达到极小。接着，设计一反滤波器并提供正弦输入。输出振幅的平方即为所要求的功率谱。这就是估算功率谱用的所谓最大熵法的基础(Burg, 1967)。若用自回归时间序列将数据近似得很好时，该方法可根据很短的资料长度获取极佳的分辨率。Andersen(1974) 描述了快速应用最大熵法的实际步骤。

自然界中自回归时间序列是相当常见的。例如从粘滞流体的质点的 Brown 运动中可发现 $M=1$ 的情况，其中自相关函数随着滞后成指数状衰减。根据(11.55)，对这种情况可得

$$n_i + a_1 n_{i-1} = x_i.$$

用 n_{i-1} 乘，对 i 求平均值，可得

$$r_1 + a_1 r_0 = 0.$$

再乘以 $n_{i-j}(i>j)$，并对 i 求平均值，则得

$$r_j + a_1 r_{j-1} = 0$$

或

$$r_j/r_{j-1} = r_1/r_0 = -a_1.$$

这样就得到指数状衰减的自相关函数。用(11.54)则得相应的功率谱 $\sigma^2\Delta t/|1+a_1\exp(ik\Delta\omega\Delta t)|^2$。$M=2$ 的情况与具有阻尼振荡形式的自相关函数对应。La Coss(1971)比较了估算功率谱的几种方法，并论证了利用具有已知谱的时间序列，采用最大熵法得到的高分辨率。

11.3.8 用最小二乘法进行信号滤波

现在讨论地震图 d_t，它是信号 s_t 和噪声 n_t 之和。它们都是如 11.3.6 节中讨论的稳定时间序列：

$$d_t = n_t + s_t. \tag{11.63}$$

本节的目的是设计一种根据地震图能最理想地消除噪声的线性滤波器。令该滤波器的脉冲响应为 $f_i(i=0, 1, 2,\cdots)$。让数据 d_t 通过滤波器，输出则是 $\sum_{i=0}^{\infty} d_{t-i}f_i$，我们要使这输出为 s_t 的最佳估计。让我们考虑进行一种反复试验，试验时从其集合中取出时间序列 n_t 和 s_t 的样本。把第 k 次试验的样本写作

$$d_t^{(k)} = n_t^{(k)} + s_t^{(k)},$$

我们将选取滤波器响应为 f_i，一般说，该响应会使滤波器输出和信号之差的平方，即

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\sum d_{t-i}^{(k)} f_i - s_t^{(k)}\right)^2$$

达到极小。求该平方和对参数 f_i 的导数并令其为零，则有

$$\frac{\partial}{\partial f_j}: \quad \sum_k \left(\sum_i d_{t-i}^{(k)} f_i - s_t^{(k)} \right) d_{t-j}^{(k)} = 0, (j=0,1,2,\cdots)$$

即

$$\sum_i f_i \sum_k d_{t-i}^{(k)} d_{t-j}^{(k)} = \sum_k s_t^{(k)} d_{t-j}^{(k)}. \ (j=0,1,2,\cdots) \quad (11.64)$$

对于 k 的和可看成是数据的自相关函数 r_t 和数据与信号之间的交叉相关函数 g_τ：

$$r_\tau = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} d_t^{(k)} d_{t-\tau}^{(k)},$$
$$g_\tau = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} s_t^{(k)} d_{t-\tau}^{(k)}. \quad (11.65)$$

这样我们便可把(11.64)改写成

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i r_{j-i} = g_j, \quad (j=0,1,2,\cdots). \quad (11.66)$$

该方程给出所期望的滤波器系数 f_i。Wiener(1949) 第一个对这样的最小二乘方滤波器进行了研究。

求解上式的有效方法是众所周知的。取滤波长度为 n，式(11.66)可写作

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 \cdots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 \quad r_1 & \\ \vdots & r_1 \ddots & \ddots \ r_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ r_{n-1} & \cdots \ r_1 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (11.67)$$

式中所有的 f_i 和 g_i 被认为是列矢量的分量。由自相关函数组成的矩阵是 Toeplitz 矩阵；它曾在自回归时间序列(11.56)的滤波器系数测定值中出现过。求解包括此矩阵的线性方程的快速递归法是由 Levinson(1949) 发现的。该方法后来由 Wiggins 和 Robinson(1965)推广应用于多重时间序列的情况。

求解(11.67)先需解(11.57)。在用滤波后的白噪声表示一平稳时间序列，并在最小延迟的假定下从自相关函数求滤波器响应这样的问题中，形成了式(11.57)。它与目前问题中缺乏信号的特殊情况相应

求解(11.57)的递归法由解下式开始：

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 \\ r_1 & r_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

并采用上述结果得到如下解：

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & r_0 & r_1 \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

如此反复下去。表示出如何从第 n 步到第 $n+1$ 步，这就足够了。假设已知下式的解 $a_i^{(n)}$：

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_n \\ r_1 & r_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_1 \\ r_n & \cdots & r_1 & r_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(n)} \\ \vdots \\ a_n^{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (11.68)$$

然后增加维数就可以把(11.68)改写成

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{n+1} \\ r_1 & r_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_1 \\ r_{n+1} & \cdots & r_1 & r_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(n)} \\ \vdots \\ a_n^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad (11.69)$$

式中 $\beta^{(n)}=r_{n+1}+r_n a_1^{(n)}+\cdots+r_1 a_n^{(n)}$。利用矩阵的对称性，发现(11.69)与下式等同：

$$\begin{pmatrix} r_0 & \cdots & r_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n+1} & \cdots & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_n^{(n)} \\ \vdots \\ a_1^{(n)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (11.70)$$

用常数 $k^{(n)}$乘以(11.70)并加到(11.69)上，得

$$\begin{pmatrix} r_0 & \cdots & r_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n+1} & \cdots & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1^{(n)} + k^{(n)} a_n^{(n)} \\ a_2^{(n)} + k^{(n)} a_{n-1}^{(n)} \\ \vdots \\ k^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^{(n)} + k^{(n)} \beta^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta^{(n)} + k^{(n)} \alpha^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (11.71)$$

若取 $k^{(n)} = -\beta^{(n)}/\alpha^{(n)}$，式右边最下面的分量为零，则上式便有所要求的形式(11.68)。于是第$(n+1)$个解 $a_i^{(n+1)}$用 $a_i^{(n)}$和 $\alpha^{(n)}$表达为

$$a_i^{(n+1)} = a_i^{(n)} + k^{(n)} a_{n+1-i}^{(n)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

且

$$a_{n+1}^{(n+1)} = k^{(n)},$$

式中

$$k^{(n)} = -\frac{1}{\alpha^{(n)}} \left(r_{n+1} + r_n a_1^{(n)} + \cdots + r_1 a_n^{(n)} \right). \quad (11.72)$$

(11.67)的递归解可采用上述结果立即得到，从该式的解 $f_1^{(n)}$开始

$$\begin{pmatrix} r_0 & \cdots & r_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n-1} & \cdots & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0^{(n)} \\ \vdots \\ f_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{11.73}$$

增加维数后则写成

$$\begin{pmatrix} r_0 & \cdots & r_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & \cdots & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0^{(n)} \\ \vdots \\ f_{n-1}^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{11.74}$$

式中

$$g^{(n)} = f_0^{(n)} r_n + f_1^{(n)} r_{n-1} + \cdots + f_{n-1}^{(n)} r_1.$$

另外，根据定义(11.68)，我们有

$$\begin{pmatrix} r_0 & \cdots & r_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & \cdots & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n^{(n)} \\ \vdots \\ a_1^{(n)} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{11.75}$$

用 $h^{(n)}$乘以(11.75)，加到(11.74)上，若选取 $h^{(n)}$满足

$$g^{(n)} + h^{(n)} a^{(n)} = g_n \text{ 或 } h^{(n)} = \frac{g_n - g^{(n)}}{a^{(n)}}. \tag{11.76}$$

以(11.73)所要求的形式表示结果，那么，

$$f_i^{(n+1)} = f_i^{(n)} + h^{(n)} a_{n-i}^{(n)} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$f_n^{(n+1)} = h^{(n)}. \tag{11.77}$$

将满足下式(该式才是我们确实要解的)：

$$\begin{pmatrix} r_0 & \cdots & r_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & \cdots & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0^{(n+1)} \\ \vdots \\ f_n^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}. \tag{11.78}$$

在得到上述最小二乘方滤波器时，我们假设该滤波器物理上可实现，并仅对过去的数据进行处理，若我们放松这一限制，

允许滤波器系数f_i为双边的，则式(11.66)中的下标j可扩展到负的范围，g_τ便成了r_τ和f_τ的简单褶积，这样f_τ的Fourier变换便成了g_τ的Fourier变换与r_τ的Fourier变换之比。若信号与噪声不相关，r_τ便是信号和噪声自相关函数之和，而g_τ便是信号的自相关函数。这样，最小二乘方滤波器的频率响应简单地变为$P_S/(P_S+P_N)$，这里P_S和P_N分别是信号和噪声的谱密度。于是，当噪声功率可以忽略时，滤波器将毫无改变地让数据通过，但在一般情况下它随着信号功率与总功率之比而使信号成比例地衰减。

11.4 地震台阵数据分析

地震台阵是分布于地球表面一地区的这样一组地震仪，其间隔小到相邻地震仪上信号的波形是相关的。这样的台阵对研究穿过台阵的波传播的详细特性，以及根据信号和噪声的波传播特性之间的差别来增强信号都是很有用的。设台阵位于xy平面上，一给定波场$f(x,y,t)$可用Fourier变换分解为平面波

$$f(x,y,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} f(k_x,k_y,\omega)\exp(+ik_x x+ik_y y-i\omega t)\times\frac{d\omega\, dk_x\, dk_y}{8\pi^3},$$

式中$f(k_x, k_y, \omega)$是频率-波数谱。这表示在xy平面上以视速度c沿方位角ϕ的方向传播的平面波振幅和相位，方位角ϕ由下式规定：

$$k_x=\frac{\omega\cos\phi}{c},$$

$$k_y=\frac{\omega\sin\phi}{c}. \qquad (11.79)$$

如果我们在许多地震台站(x_i, y_i)上能从观测到的$f(x_i,$

y_i、t)估算出 $f(k_x, k_y, \omega)$，便能用简单平面波的迭加来解释一给定的波场。应用台阵估算频率-波数谱时，我们把直接处于台阵正下方的地球作为测量装置的一部分。若那部分地球是均匀的，则测得的谱便清楚地表示出入射波的性质。遗憾的是通常不是这样，"平面波"在台阵下地球中传播时，不能保持平面波阵面。图 13.10 中表示了在蒙大拿州大孔径地震台阵处观测到的不规则波阵面的实例(出现相位起伏)。

为了弥补这种令人遗憾的状况，我们引入所谓台站校正。波在第 i 个台站的到时表达为

$$t_i = t_0 + \frac{\cos\phi}{c}(x_i - x_0) + \frac{\sin\phi}{c}(y_i - y_0) + \tau_i, \qquad (11.80)$$

式中 t_0 是参考点(x_0, y_0)上的到时，τ_i 是台站残差（$-\tau_i$ 是台站校正）。对三个以上的大量台站，可用最小二乘法测定 t_0，c 和 ϕ 三个参数，取 $\sum_i \tau_i^2$ 的极小，然后采用最小二乘法测定的参数，确定 τ_i 为观测到时减去计算到时。

为了对估算波数谱问题的一般性讨论做准备，我们将阐述一些采用台阵数据的信号增强技术。

增强信号的最简单但也最有效的方法之一是以(11.80) 给出的量平移每个记录的时间，以使所有台站的信号到时都一样，然后计算每个时刻上所有记录的简单代数和。该过程称为聚束。

该方法要求预先知道 c，ϕ 和台站校正 τ_i，通常该校正强烈地依赖于 c 和 ϕ，因此，除非预先知道传播速度和到达方位，否则不能增强信号。若能聚成所有可能的波束，并选择能给出最清晰信号的波束，该问题就能避免了。在蒙大拿州的大孔径地震台阵曾实时聚成六百个预先调节好的波束。

视速度 c 的倒数称为 $dT/d\Delta$，对远震体波称为射线参数 p。正如下一章中所证明的，$dT/d\Delta$ 对于获得地球结构的走时反演起着重要作用。

现在让我们讨论应用地震台阵数据增强信号的技术。

11.4.1 多道最小二乘方滤波器

让我们先讨论 11.3.8 节中谈及的最小二乘方滤波器直接推广到多道时间序列的情况。我们把第 i 台站上的地震图 $d_{t,i}$ 表示为噪声 $n_{t,i}$ 与信号 $s_{t,i}$ 之和：

$$d_{t,i}=n_{t,i}+s_{t,i}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ M),\tag{11.81}$$

式中 t 是离散化的时间。

我们的问题是找出这样的多道滤波器 $f_{T,ij}$，它能用全部是过去的数据来运算，并给出在时刻 t 时第 i 台站上的最佳信号估计值：

$$\hat{s}_{t,i}=\sum_{T=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{M}f_{T,ij}d_{t-T,j}\tag{11.82}$$

假设信号和噪声都是平稳的时间序列，获得最佳滤波器的过程类似于 11.3.8 节中所谈的过程。考虑到数据 $d_{t,i}^{(k)}$ 和信号 $s_{t,i}^{(k)}$ 的许多采样，我们确定滤波器系数 $f_{T,ij}$，它使信号估计值 $\hat{s}_{t,i}^{(k)}$ 与信号采样值之差的平方按平均值算达到极小。由于时间序列都是平稳的，对某一个 t 测定的滤波器系数可应用于任一时刻。用〈 〉标志对采样的平均，可用解

$$\sum_{T=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{M}f_{T,ij}\langle d_{t-T,j}d_{t-T',k}\rangle=\langle s_{t,i}d_{t-T',k}\rangle.\tag{11.83}$$

得到使

$$\left\langle\left(\sum_{T}\sum_{j=1}^{M}f_{T,ij}d_{t-T,j}-s_{t,i}\right)^{2}\right\rangle$$

达到极小的滤波器系数。定义

$$r_{T,ij}=\langle d_{t,i}d_{t-T,j}\rangle,$$
$$g_{T,ij}=\langle s_{t,i}d_{t-T,j}\rangle,$$

则可将(11.83)改写为

$$\sum_{T=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{M}f_{T,ij}r_{T'-T,jk}=g_{T',ik}.\tag{11.84}$$

把 $\boldsymbol{f}_{T,i}$ 和 $\boldsymbol{g}_{T,i}$ 看作是具有 M 个分量的列矢数，将 $\boldsymbol{r}_T$ 看作一个 $M\times M$ 矩阵，则有

$$\boldsymbol{f}_{T,i}=\begin{pmatrix} f_{T,i1}, \\ f_{T,i2} \\ \vdots \\ f_{T,iM} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{g}_{T,i}=\begin{pmatrix} g_{T,i1} \\ g_{T,i2} \\ \vdots \\ g_{T,iM} \end{pmatrix},$$

和

$$\boldsymbol{r}_T=\begin{pmatrix} r_{T,11} & r_{T,12} & \cdots & r_{T,1M} \\ r_{T,21} & r_{T,22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{T,M1} & \cdots & \cdots & r_{T,MM} \end{pmatrix}.$$

这样我们能进一步简化前式为

$$\sum_{T=0}^{\infty}\boldsymbol{r}_{T'-T}\boldsymbol{f}_{T,i}=\boldsymbol{g}_{T',i}. \tag{11.85}$$

这是与(11.66)同样的形式，不同的是上面定义的 $\boldsymbol{f}_{T,i}$ 和 $\boldsymbol{g}_{T',i}$ 是矢量，$\boldsymbol{r}_{T'-T}$ 是矩阵。求解(11.85)可用11.3.8节中解(11.66)式所用的同样的递归法，只需以合适的矩阵和与乘法代替标量和与乘法(Wiggins and Robinson, 1965)。

图11.9表示了由Claerbout (1964) 从犹他州尤因塔盆地台阵台站(地震仪间隔约1公里)所得的数据自相关 $r_{T,ij}$ 的实际例子。图中 $r_{T,ij}$ 的值画成每个台站对(i,j)的 T 的分段连续函数。请注意，根据定义，$r_{T,ij}=r_{-T,ji}$。采用这组自相关矩阵，Claerbout 得一最小二乘方滤波器，很好地预测了没信号时未来一点上的噪声值。实际数据和预测值之差称为预测误差滤波器输出，正如图11.10下部所示，它增强了远震信号。虽然信号只在上部所示实际数据中能看见，但到时和初动方向在输出中都清晰地被检测出。普通的带递滤波器能增强信号振幅，但如图11.10所示，无法确定到时和初动方向。然而这个滤波器使信号波形失真。

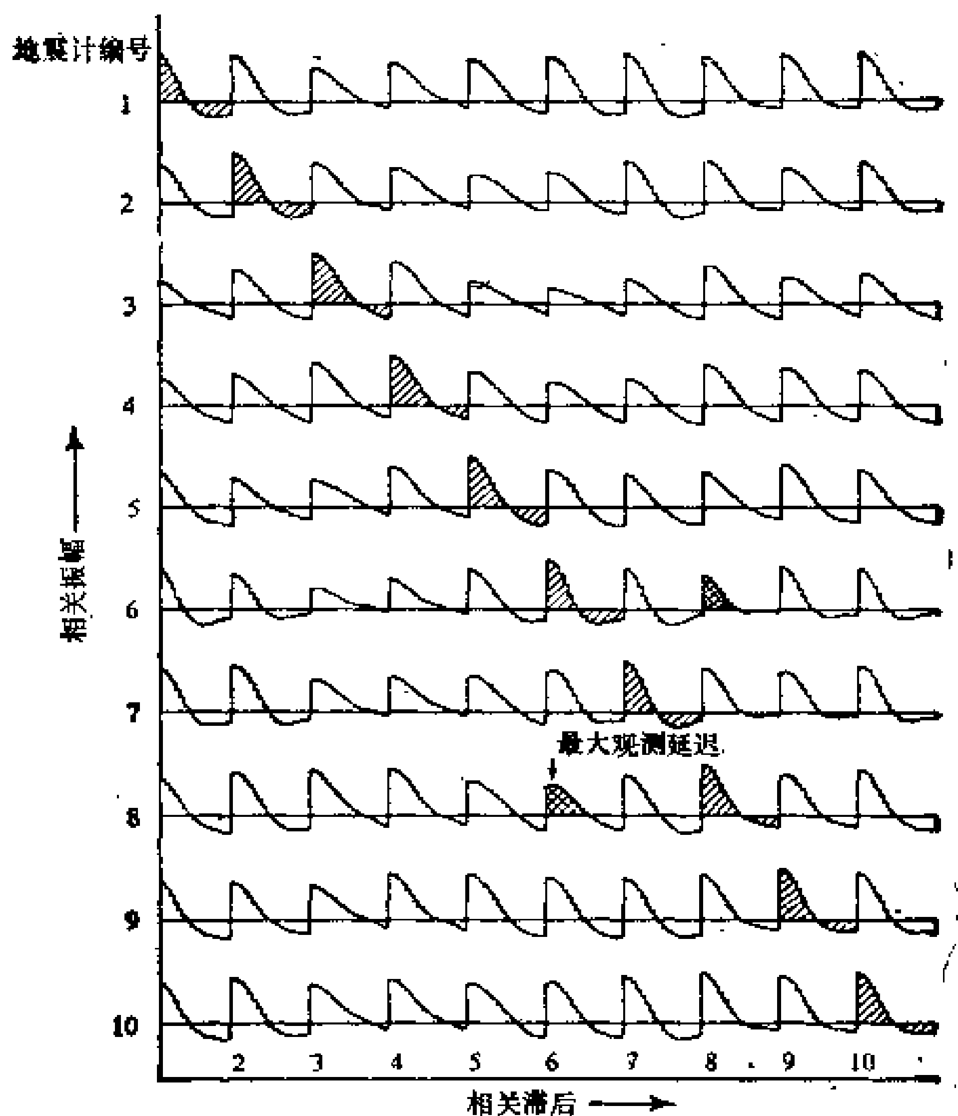


图 11.9

在尤因塔盆地台阵台站所得的地震噪声的自相关函数 $r_{T,ij}$。对每一对(i,j)，$r_{T,ij}$ 画成 T 的分段连续函数。对角元素画成阴影状。根据定义，$r_{-T,ij}=r_{T,ji}$(引自Claerbout,1964)

无信号失真的最小二乘方滤波器称为最大似然滤波器，这将在11.4.2节中加以讨论。

11.3.8节中论及的频率域中的最小二乘方滤波器的简单解释可扩展到频率-波数域。若地震仪间隔均匀、恰当计数的话，式(11.84)中对台站 j 的加法可认为是空间褶积。为了能对两边

进行运算，假设信号与噪声是不相关的，频率-波数域中的最小二乘方滤波器的响应 $f(k_x,k_y,\omega)$ 可写为信号功率密度与信号、噪声功率密度和的比

$$f(k_x,k_y,\omega)=\frac{P_S(k_x,k_y,\omega)}{P_S(k_x,k_y,\omega)+P_N(k_x,k_y,\omega)},\qquad(11.86)$$

它是一维结果的自然延伸。正如Burg(1964)所指出的，频率-波数法可提供一较深刻的物理理解(若台阵下介质是均匀的)，但多道法对滤波器设计来说较为实际。Schneider等(1964)详细阐述

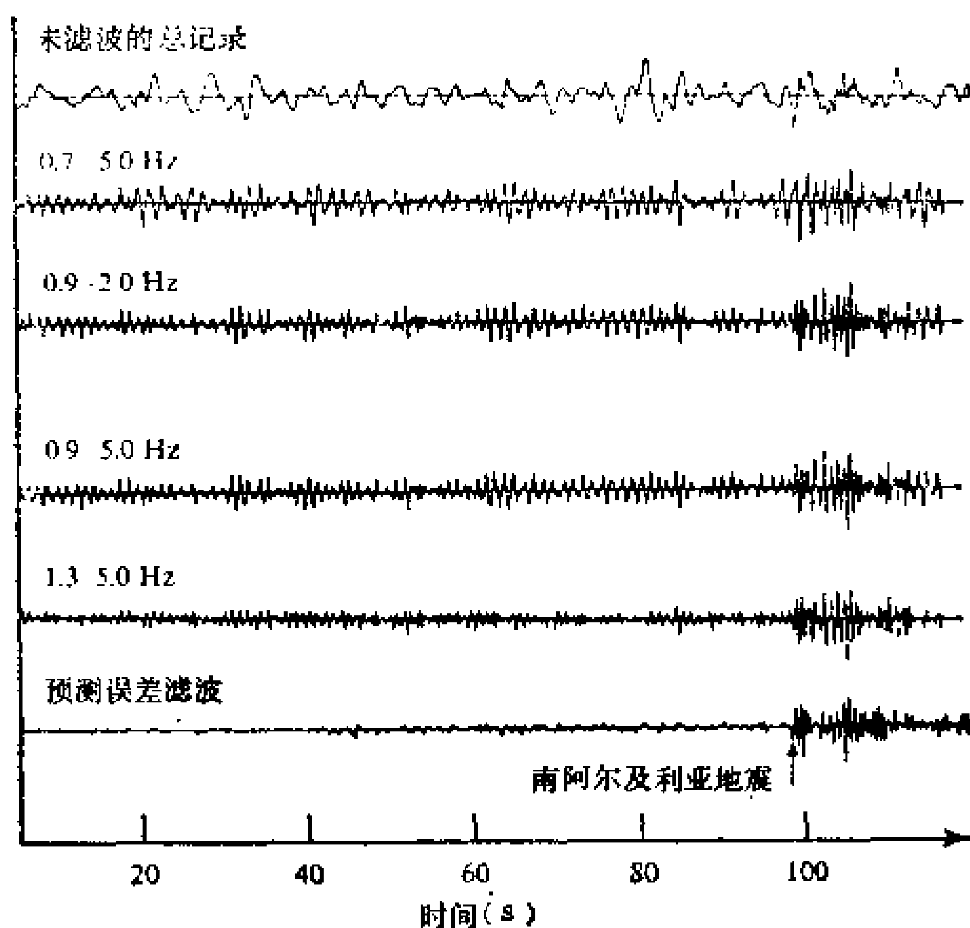


图 11.10

最上边的曲线是未滤波的地震图，最下边的曲线是多道最小二乘方滤波器的输出。在未滤波记录曲线中隐藏在噪声里的远震事件初动被最小二乘方滤波器清晰地侦测出来。普通带通滤波器能增强信号振幅，但不能确定提供最重要信息的初动(引自Claerbout, 1964)

了为解决从反射地震图消除虚到达的较为简单的双道问题的不同方法。

Laster 和 Linville (1966)采用多道最小二乘方滤波器，在对实验室模型所得的地震图上成功地分离了 Rayleigh 波的基阶振型和几个高阶振型。

11.4.2 共同的信号波形模型

前一节中，我们假设信号是一平稳时间序列，而且数据和信号间的互相关函数 $g_{\tau,ij}$ 是已知的，但这些假设不可能总是现实的。对远震 P 波，另一简单但可能较为现实的假设是信号波形在所有台站可能相同，只是如(11.80)所确定的那样，有不同的到时。采用(11.80)给出的到时 t_i，把数据在时间平移并写出

$$d_{t,i}=s_t+n_{t+t_i,i},\qquad(11.87)$$

式中 s_t 是未知的共同的信号，不过不再是统计变量。

为了简化起见，让我们首先考虑只在一个时间点上的数据。我们写出

$$d_i=s+n_i\quad(i=1,2,\ldots,M),\qquad(11.88)$$

并假设 d_i 遵循具有均值 s 和协方差矩阵

$$\rho_{ij}=\langle n_i n_j\rangle\qquad(11.89)$$

的 Gauss 分布。概率密度函数 $f(d_1,d_2,\ldots,d_M)$ 可写为

$$f(d_1,d_2,\ldots,d_M)=\frac{|\phi|^{1/2}}{(2\pi)^{M/2}}\exp$$

$$\times\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\phi_{ij}(d_i-s)(d_j-s)\right],\qquad(11.90)$$

式中 ϕ_{ij} 是协方差矩阵 ρ_{ij} 的逆矩阵的第(ij)个元素，$|\phi|$是其行列式(Papoulis, 1965)。这里下标 i 和 j 表示不同的台站。ϕ_{ij} 和 ρ_{ij} 之间的逆关系可用下列方式予以证明：

由于$\int\cdots\iint f(d_1,d_2,\ldots,d_M)\,dd_1dd_2\ldots dd_M=1$，我们有

$$|\phi|^{-1/2}=\frac{1}{(2\pi)^{M/2}}\int\cdots\int\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\phi_{ij}(d_i-s)\right.$$

$$\left.\times(d_j-s)\right\}dd_1\ldots dd_M.$$

对两边的 ϕ_{ij} 求导数，得到

$|\phi|^{3/2}\times\phi_{ij}$ 的余因子

$$=\frac{1}{(2\pi)^{M/2}}\int\cdots\int(d_i-s)(d_j-s)$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\times\phi_{ij}(d_i-s)(d_j-s)\right]dd_1\ldots dd_M.$$

由于右边是 $|\phi|^{-1/2}\langle(d_i-s)(d_j-s)\rangle$，左边是 $|\phi|^{-1/2}\cdot[\phi^{-1}$的$(ij)$元素]，则得

$$[\phi^{-1}\text{的}(ij)\text{元素}]=\langle(d_i-s)(d_j-s)\rangle=\rho_{ij},$$

或 $\phi=\rho^{-1}$。

若选择 s 以使

$$\sum_{i,j}^{M}\phi_{ij}(d_i-s)(d_j-s)$$

达到极小，给定的一组数据发生的概率（11.90）便成极大。对 s 取导数，并令结果等于零，则求得当

$$s=\frac{\sum_{i,j}^{M}\phi_{ij}d_i}{\sum_{i,j}^{M}\phi_{ij}}\tag{11.91}$$

时出现极小。这是数据的加权平均值，其权正比于协方差矩阵的逆矩阵的元素之和。当数据只由一个时间点组成，这是信号的最大似然估计。

若在各台站间噪声是不相关的，则 ρ_{ij} 是对角矩阵，其对角元素等于噪声功率。权 ϕ_{ij} 也是对角的，其元素反比于噪声功率。于是滤波器把较大的权加于低噪声台站。

最大似然估计（11.91）可用前面论及的在某些约束下的最小二乘方滤波器法来得到。我们将应用一线性滤波器 f_i 于数据 d_i，以求得信号 s 的最佳估计。当数据完全由信号组成并使信号无失真地通过滤波器这样的约束下，我们使（$\sum_i f_i d_i - s$）的均方值达到极小。这约束可用 $\sum f_i s = s$ 或 $\sum f_i = 1$ 加以描述。这样我们得到

$$\left\langle\left(\sum_i f_i d_i - s\right)^2\right\rangle = \left\langle\left(\sum_i f_i (s + n_i) - s\right)^2\right\rangle$$

$$= \left\langle\left(\sum_i f_i n_i\right)^2\right\rangle$$

$$= \sum_i \sum_j f_i f_j \rho_{ij}.$$

我们要在 $\sum f_i = 1$ 这个约束之下使它达到极小。使用 Lagrange 乘子 λ，我们将求出使

$$\sum_i \sum_j f_i f_j \rho_{ij} - \lambda\left(\sum_i f_i - 1\right)$$

为极小的 f_i 和 λ。则可求得

$$\sum_j \rho_{ij} f_j = \lambda \quad (i = 1, 2, \cdots, M)$$

且

$$\sum_i f_i = 1.$$

只要记住 $\sum_j \rho_{ij} \phi_{jk} = \delta_{ik}$，则能看到 $f_j = \lambda \sum_k \phi_{jk}$ 会满足最初的方程。第二个方程满足 $\lambda = 1/\sum_j \sum_k \phi_{jk}$。于是有

$$f_j = \frac{\sum_k \phi_{jk}}{\sum_j \sum_k \phi_{jk}},$$

该式给出与(11.91)给出的最大似然估计同样的信号估计.

这样我们可以说，在信号不失真的约束下，用最小二乘方滤波器可以得到信号的最大似然估计.

现在让我们把这个结果推广到具有有限长度N的数据。对于$M\times N$变量$d_{i,i}$的概率密度函数可写成：

$$f=\frac{|\Phi|^{1/2}}{(2\pi)^{MN/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\sum_{k,l=1}^{N}\Phi_{ij}^{kl}(d_{k,i}-s_k)(d_{l,j}-s_l)\right],$$

(11.92)

式中Φ_{ij}^{kl}是$MN\times MN$矩阵的元素。该矩阵的元素是

$$\rho_{ij}^{kl}=\langle(d_{k,i}-s_k)(d_{l,j}-s_l)\rangle, \tag{11.93}$$

它是协方差矩阵的逆矩阵。下标i和j指台站，k和l指时间。上述关系式可以以类似于$N=1$情况的方式得到。

把(11.92)的[ ]中的因子对s_l求极小，便得到信号s_l的最大似然估计。对s_l取导数并使之为零，则得

$$\sum_{k=1}^{N}s_k\sum_{i,j=1}^{M}\Phi_{ij}^{kl}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{M}d_{k,i}\Phi_{ij}^{kl}\quad(l=1,\cdots,N) \tag{11.94}$$

其解s_k给出信号的最大似然估计，又相应于无信号失真的最小二乘方滤波器输出。

若噪声在时空上都是纯随机的，则除了$i=j$和$k=l$的情况外，其余情况下ϕ_{ij}^{kl}为零。此外若噪声在时空上是平稳的，则ϕ_{ii}^{kk}便是与(i, k)无关的常数。这样(11.94)简化为

$$s_l=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}d_{l,i}. \tag{11.95}$$

因为$d_{l,i}$已按照(11.87)进行了时间平移，所以上述公式给出前面讨论过的简单聚束输出。这样，噪声振幅反比于$\sqrt{M}$而减小，其中M是地震仪数目。

正如Capon等(1968，1969)总结的，基于(11.94)的最大似然法已应用于蒙大拿州大孔径地震台阵所得的短周期和长周期数

据子台阵间短周期噪声是不相关的（图 11.2），最大似然法几乎不比聚束法优越。当该方法应用于子台阵内的短周期数据时，它主要对频率约为 0.2 赫的脉动噪声起作用并减弱这些噪声。但在 0.2 赫处脉动噪声功率的巨大优势趋向于使其它频率处的估计变得模糊了。该特性可用减少脉动的前置滤波来加以改善，但前置滤波同样会引入不希望出现的信号失真，而这种失真实际上可能无法校正。一般说来，在较小地区（约 0.5 公里间隔）进行最大似然处理，给出了能与在较大地区（比如 3 公里间隔）进行聚束的结果可相比拟的结果；这两种情况下，噪声降低约 $\sqrt{M}$ 倍。

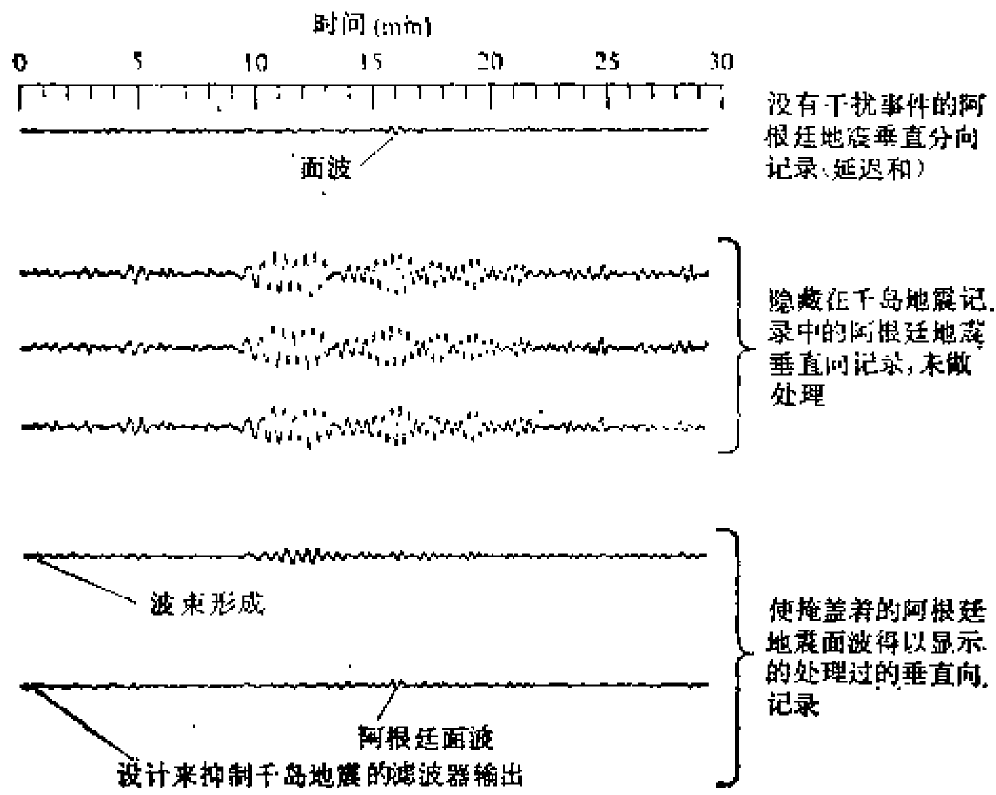


图 11.11

用人造数据检验最大似然法。如第二到第四条曲线所示，信号（最上面一条）与噪声混合在一起。最下面的曲线表明用最大似然法成功地还原了信号。从下面数第二条曲线表示聚束法不能识别信号（引自 Capon et al., 1969）

在噪声穿过台阵时高度相干的情况下，最大似然法有效地起着作用。最成功的成果之一是把来自并非所研究震源区的某一地区的长周期 Rayleigh 波看作为噪声时而得到的。把来自阿根廷的小地震的 Rayleigh 波迭加到库页岛的 Rayleigh 波上，并用最大似然法进行处理。正如图 11.11 所示，噪声（库页岛 Rayleigh 波）被大大压缩（振幅压缩 10 倍），以至阿根廷地震变得可识别。但聚束过程（在图 11.11 中标明为延迟的和数输出）不能识别阿根廷地震。

11.4.3 频率-波数功率谱

频率-波数功率谱会使我们对波场有个直接的物理理解，因为它告诉我们分布在不同波速和到达方向的功率量。就如我们在 11.3.6 和 11.3.7 节中所做的，把地震噪声当作平稳时间序列并进行功率谱测量，我们这里将假设地震噪声在时间 t 和空间坐标 x，y 上都是平稳的。

有两种估算功率谱的基本方法。一种是估算自相关函数，然后作 Fourier 变换。另一种是直接计算噪声的 Fourier 变换，然后求绝对值的平方及平均值。

让我们把这两种方法表达得更清楚些。若把噪声场写作 $n(x, y, z)$，自相关函数写作 $R(\xi, \eta, \tau)$，功率谱密度写作 $P(k_x, k_y, \omega)$，则有

$$R(\xi,\eta,\tau)=\langle n(x,y,t)n(x+\xi,y+\eta,t+\tau)\rangle \qquad (11.96)$$

和

$$P(k_x,k_y,\omega)=\iiint_{-\infty}^{\infty} R(\xi,\eta,\tau)\exp[i(\omega\tau-k_x\xi-k_y\eta)]d\tau\, d\xi\, d\eta. \qquad (11.97)$$

在第二种方法中，我们将介绍类似于 11.3.6 节所描述的那种离散功率谱。用下式定义功率谱 P_{lmk}：

$$P_{lmk}=\lim_{LMK\to\infty}\frac{\langle|F_{lmk}|^2\rangle}{L\Delta x M\Delta y K\Delta t}, \qquad (11.98)$$

式中 F_{lmk} 是在三维空间各点上数字化噪声场 $n(l\Delta x, m\Delta y, k\Delta t)$的离散 Fourier 变换，这三维空间位置点的间隔在 x 方向上为 Δx，在 y 方向上为 Δy，在 t 方向上为 Δt。数据长度在 x，y，t 方向上分别是 $L\Delta x$，$M\Delta y$ 和 $K\Delta t$，

$$F_{lmk}=\sum_{l'=0}^{L-1}\sum_{m'=0}^{M-1}\sum_{k'=0}^{K-1}n(l'\Delta x, m'\Delta y, k'\Delta t)$$

$$\times\exp\left(-i\frac{2\pi ll'}{L}-i\frac{2\pi mm'}{M}+i\frac{2\pi kk'}{K}\right)\Delta x\Delta y\Delta t. \tag{11.99}$$

上述方法可直接应用于在空间上或多或少是连续的情况下所得的数据。当地震噪声为完全平稳时，可反复使用一台流动地震仪，以便覆盖任意的空间点，作出空间连续的自相关函数测量。在繁华的大城市中交通引起的地面运动就是这种情况。

但在大部分情况下，地震噪声是由大气和海洋干扰引起的，并不是完全平稳的，这些干扰则是瞬时的。设计用来研究噪声的地震台阵是不流动的，因而要达到自相关函数的连续空间覆盖很困难。前面所述的基本方法对多数数据不适用。

实际上已研究出了几种近似的方法。最简单的方法是把聚束法与对波束输出进行功率谱估计结合起来。根据（11.79）和（11.80），对点(k_x, k_y, ω)进行聚束所要求的时间变化是

$$t_i=t_0+\frac{k_x}{\omega}(x_i-x_0)+\frac{k_y}{\omega}(y_i-y_0)+\tau_i, \tag{11.100}$$

式中 τ_i 是（11.80）中引入的台站残差。若把第 i 台站的噪声时间序列表达为 $n_i(t)$，则波速输出可写为

$$b(k_x/\omega,\ k_y/\omega, t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}n_i(t+t_i). \tag{11.101}$$

通过计算自相关，然后进行 Fourier 变换，可得到作为一时间序列的 $b(k_x/\omega,\ k_y/\omega,\ t)$的功率谱。结果是：

$$\hat{P}(k_x, k_y, \omega)=\int \exp(i\omega\tau)\, d\tau \frac{1}{N^2}\left\langle \sum_{i=1}^{N} n_i(t+t_i)\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{N} n_j(t+\tau+t_j)\right\rangle. \tag{11.102}$$

根据定义(11.96)，可把该结果写为

$$\hat{P}(k_x, k_y, \omega)=\int \exp(i\omega\tau)\, d\tau \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} R(x_j$$

$$-x_i, y_j-y_i, t_j-t_i+\tau). \tag{11.103}$$

引入权函数

$$W(\kappa_x, \kappa_y)=\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \exp[-i\kappa_x(x_i-x_j)-$$

$$-i\kappa_y(y_i-y_j)+i\omega(\tau_i-\tau_j)], \tag{11.104}$$

我们将证明我们的简单估计$\hat{P}$是下式所得真实功率谱的加权平均：

$$\hat{P}(k_x, k_y, \omega)=\iint_{-\infty}^{\infty} W(\kappa_x-k_x, \kappa_y-k_y)$$

$$\times P(\kappa_x, \kappa_y, \omega)d\kappa_x, d\kappa_y. \tag{11.105}$$

把 (11.104) 代入 (11.105)，则得

$$\hat{P}(k_x, k_y, \omega)=\sum_{i,j}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{N^2}\exp[+i\kappa_x(x_j-x_i)$$

$$+i\kappa_y(y_j-y_i)]\times\exp[-ik_x(x_j-x_i)-ik_y(y_j$$

$$-y_i)-i\omega(\tau_j-\tau_i)]\times P(\kappa_x, \kappa_y, \omega)d\kappa_x d\kappa_y. \tag{11.106}$$

另外，从 (11.97) 的逆变换得

$$R(x, y, \tau)=\iiint_{-\infty}^{\infty} P(\kappa_x, \kappa_y, \omega)\exp(-i\omega\tau$$

$$+i\kappa_x x+i\kappa_y y)d\omega\ d\kappa_x d\kappa_y/8\pi^3$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x, y, \tau')\exp(i\omega\tau')d\tau'$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty} P(\kappa_x, \kappa_y, \omega)\exp(+i\kappa_x x+i\kappa_y y)d\kappa_x d\kappa_y/4\pi^2.$$

将此结果代入(11.106)，则有

$$\hat{P}(k_x,k_y,\omega)=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega\tau')d\tau' R(x_j-x_i,y_j$$
$$-y_i,\tau')\exp[-ik_x(x_j-x_i)$$
$$-ik_y(y_j-y_i)-i\omega(\tau_j-\tau_i)].$$

把$\tau'-\frac{k_x}{\omega}(x_j-x_i)-\frac{k_y}{\omega}(y_j-y_i)-(\tau_j-\tau_i)$改写成$\tau$,则

$$\hat{P}(k_x,k_y,\omega)=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega\tau)d\tau R(x_j-x_i,y_j$$
$$-y_i,\tau-t_j-t_i),$$

这与(11.103)相符．因此，波束输出的功率谱是真实功率谱的加权平均。只要台站分布(x_i,y_i)已知,可用(11.104)计算权函数$W(\kappa_x,\kappa_y)$。

图11.12中显示了蒙大拿州大孔径地震台阵的两小组地震仪及其相应的权函数，这图是根据LaCoss等(1969)的图重绘的。若权函数是以$\kappa_x=\kappa_y=0$为中心的Δ函数，则我们的估计便给出真实谱的精确值。但该图显示了对直径为22公里的台阵,扩散范围(在从中心峰值往下6分贝)约为±0.035公里$^{-1}$，而对直径为30公里的台阵，则扩散范围约为±0.025公里$^{-1}$。图11.13显示了不同频率的实际波数谱的实例。LaCoss及其合作者们研究了蒙大拿州大孔径地震台阵记录的地震噪声的振型结果，发现频率高于0.3赫的噪声主要可能是由海洋里大风暴产生的压缩波；0.2—0.3赫间最嘈杂的频带则由体波和高阶振型Rayleigh波组成。在频率低于0.15赫时，垂直分向脉动主要由基阶振型Rayleigh波组成。他们检测到在这些低频时可观的Love波的能

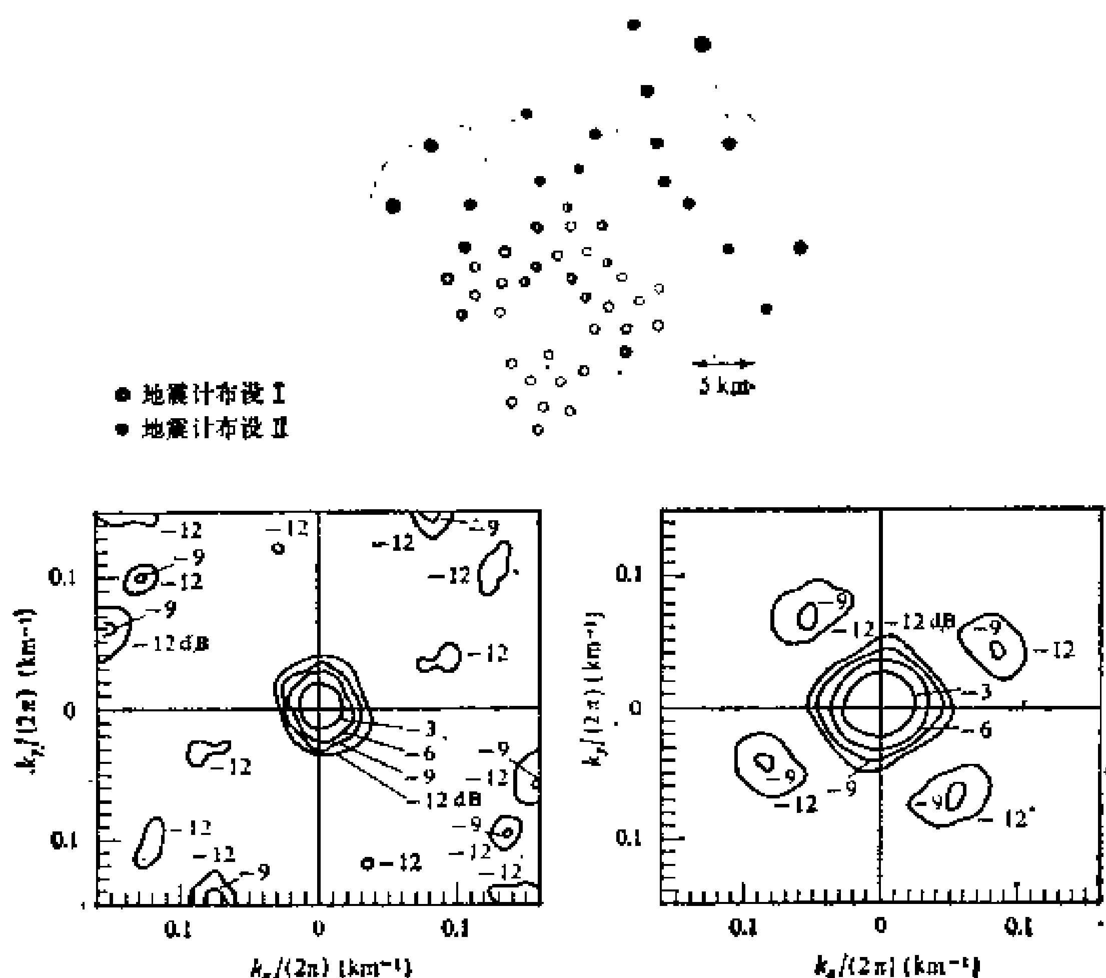


图 11.12

两种不同布设的台阵权函数的实例；第一种布设（台阵直径为22公里）在右边，第二种布设（直径为30公里）在左边（引自LaCoss et al., 1969）

量。

在11.3.7节中，我们讨论了对自回归型时间序列，用高分辨率估计功率谱的方法。同样的方法可推广应用于高分辨率波数谱分析。但直接应用有困难，因为地震仪空间分布是不均匀的。

另一种方法叫做最大似然估计法，是由Capon(1969)研究出来的。该方法也比惯用方法有更高的分辨率。为了描述这种方法，我们将回溯到11.4.2节的式(11.92)，考虑一下一个台站(M 1)的简单情况。N个变量的概率密度函数 d_i 可写作

$$f=\frac{|\boldsymbol{\Phi}|^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N}\Phi^{kl}(d_k-s_k)(d_l-s_l)\right],$$

(11.107)

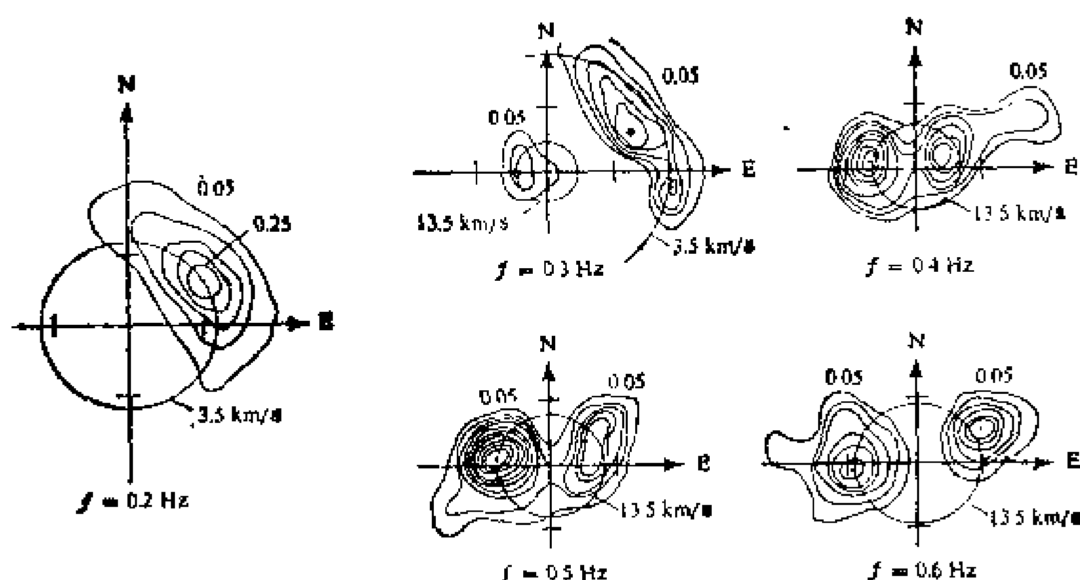


图 11.13

蒙大拿州大孔径地震台阵观测到的五种不同频率脉动的波数谱（引自 LaCoss et al., 1969）

式中 ϕ^{kl}是 $M\times N$ 矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的元素，该矩阵是其元素为

$$\rho^{kl}=\langle(d_k-s_k)(d_l-s_l)\rangle \tag{11.108}$$

的协方差矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 的逆矩阵。假设信号 s_k 具有已知形状 $f_k(k=1,2,\cdots,N)$，但其振幅包含未知因子 c：

$$s_k=cf_k. \tag{11.109}$$

让我们先提个问题：当数据 $d_k(k=1,2,\cdots,N)$已知时，c 的最大似然估计是什么？为简便起见，使用矩阵表示法，（11.107)中的指数可写作$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}-c\boldsymbol{f})^T\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{d}-c\boldsymbol{f})$，这里 $\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别为具有分量 d_k 和 f_k 的列矢量，T 表示对矢量取转置。

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}-c\boldsymbol{f})^T\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{d}-c\boldsymbol{f})=-\frac{1}{2}[\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{d}-c\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{f}-$$

$$-cf^T\Phi d \quad c^2 f^T\Phi f].$$

若对 c 求导数，令结果为零，则因为 Φ 是对称的，可看到 $d^T\Phi f=f^T\Phi d$，最大似然估计就是

$$\hat{c}=\frac{d^T\Phi f}{f^T\Phi f}. \tag{11.110}$$

$s=cf$ 的相应估计是

$$s=\hat{c}f=\frac{d^T\Phi f}{f^T\Phi f}f.$$

当 d 等于 cf 时，上式等于 cf，换句话说，它并未使信号失真.根据 Robinson (1963) 的观点，我们可求出估计值 c 的方差改写

$$\hat{c}-c=(d-cf)\Phi f(f^T\Phi f)^{-1}$$

并注意到 $\langle(d-cf)(d-cf)^T\rangle=\rho$ 和 $\rho=\Phi^{-1}$，则得

$$\begin{aligned}
&\langle(\hat{c}-c)^2\rangle=\langle(\hat{c}-c)^T(\hat{c}-c)\rangle\\
&=(f^T\Phi f)^{-1}f^T\Phi\langle(d-cf)(d-cf)^T\rangle\Phi f(f^T\Phi f)^{-1}\\
&=(f^T\Phi f)^{-1}f^T\Phi\rho\Phi f(f^T\Phi f)^{-1}=(f^T\Phi f)^{-1}f^T\Phi f(f^T\Phi f)^{-1}\\
&=(f^T\Phi f)^{-1}\\
&=(f^T\rho^{-1}f)^{-1}.
\end{aligned} \tag{11.111}$$

概述上述结果，信号振幅 c 的最大似然估计由 $(d^T\Phi f)\times(f^T\Phi f)^{-1}$ 给出，估计值的方差等于 $(f^T\rho^{-1}f)^{-1}$，这里 ρ 是噪声的协方差矩阵，$\Phi=\rho^{-1}$。当信号形状 f 是单位正弦振荡，Capon 使用的功率谱的最大似然估计是 $f_k=\exp[i\omega(k-1)\Delta t]$ 信号估计的方差，这里 ω 是估算功率谱时的频率，功率谱估算是

$$\frac{1}{f^T\Phi f^*}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Phi^{kl}\exp[i\omega(k-l)\Delta t]}, \tag{11·112}$$

式中包括共轭运算*，因为 f 是复数。式 (11.112) 是功率谱的合理估计，因为它是一给定频率的虚正弦的最佳估计方差。由于该方差是由这频率附近的噪声功率引起的，这必然给出该频率处

噪声功率谱的高分辨率估计。请注意，该估计不要求等间距采样，因为 f_i 可任意选择。

把（11.112）自然扩展到二维的情况，即给出频率-波数谱的 Capon 估计：

$$P(k_x,k_y,\omega)=\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\phi_{ij}(\omega)\exp[ik_x(x_i-x_j)+ik_y(y_i-y_j)]\right\}^{-1}, \qquad (11.113)$$

式中 $\phi_{ij}(\omega)$是矩阵 $\phi(\omega)$的一个元素；$(x_i,\ y_i)$ 表示地震仪的位置。$\phi(\omega)$是由式

$$\rho_{\tau,ij}=\langle n_{i,t}n_{j+\tau,t}\rangle$$

给出的协方差矩阵 $\rho_{\tau,ij}$ 的 Fourier 变换的逆矩阵，其中 $n_{i,t}$ 是第 i 台站的噪声。

Capon 在分离穿过大孔径地震台阵传播的波的各种振型时常运用此方法。他特别证明了后至 Rayleigh 波是由某些海陆边界处的散射引起的。

11.5 有效分析方法的一些实例

本章内我们涉及了线性 Gauss 方法中增强信号的一般方法，这种方法用平均值和协方差矩阵完整地描述了数据的统计特性。虽然前几节中我们叙述了一些成功的实例，但必须谨慎的是地震数据不永远遵循 Gauss 分布。

例如，测定地震震级、地震矩或衰减时，把振幅的对数画成震中距的函数，这是常见的工作，这表明振幅的对数是遵循 Gauss 分布的。在第十三章中，我们将研究的是在蒙大拿州大孔径地震台阵传感器上观测到的 P 波振幅和震相的对数的变化，而不是 Fourier 变换的实部和虚部，因为 Chernov 的波散射理论预测了 Fourier 变换对数的方差。若地震图上噪声是“信号造成的”，

比如由散射引起的，则本章中使用的 Gauss 方法可能不合适。

这不是个无价值的问题，因为线性反演问题正被应用于面波和自由振荡的 Fourier 变换，以便使用如（7.149）这样的公式得到地震矩张量的元素。大的相位变化会导致地震矩的估计不足，因为Fourier 变换的实部和虚部在零的上下趋于离散。相反，相位相干时，振幅分布的非对称性可能引起估计过高。

然而，在一些正在扩张的领域，本章阐述的分析方法似乎很有效。例如，在增强远震体波信号方面很有效的聚束法，就是一个简单的时间变化和求和的过程。同一过程用于共深度点(CDP)迭加，这是反射地震学中最成功的数据简化技术之一。更简单的是 Mendiguren（1973）用于世界标准地震台网的台站自由振荡数据迭加的改变符号与求和的过程。Mendiguren 采用地震震源机制和最初的地壳模型的资料，成功地获得清晰的、高分辨率的谱峰识别，后来 Nolet（1975）把迭加法推广到求大量高阶 Rayleigh 波的相速度。这里我们将简要叙述一下这些成功的方法，同时也介绍其它几种已被证明有用的方法。这些成功的技术有一共同点，即能有效地将先验的知识引入分析过程。例如，聚束法很有用，因为对不同方向的入射波都能得到精确的台站校正值。总之，有关地球、震源的现有知识和原始数据用得越多，则从这些数据能获取的信息就越精确详细。

11.5.1 共深度点迭加法

CDP 迭加法最由 W. H. Mayne（1950 年申请专利）引入的。该方法通过结合从许多爆炸点和检波器位置得到的许多记录，增强一给定反射点的反射信号。随着数字处理技术的出现，该方法变得极为普遍。如图 11.14 所示，爆炸点和接收点选得离反射物点等距离。记录在时间上这样移动，以使所有接收器上反射信号的到达与垂直于反射点上方的到达一致。CDP 迭加法是这些时间平移记录的代数和，只要在所覆盖的水平距离范围内同样的反射波形保持不变，又精确知道走时，该代数和能增强反射。

假定反射物上方的介质是均匀的，压缩波速度为 α。反射点和接收器间的走时是 $\sqrt{x^2+h^2}/\alpha$，其中 x 是水平传播距离，h 是

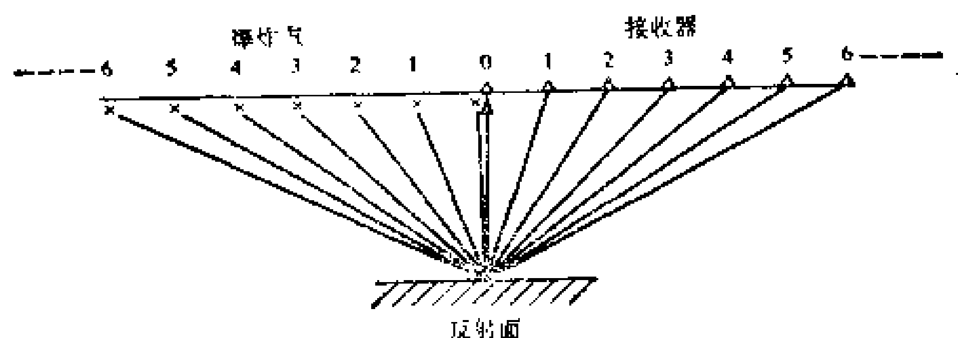


图 11.14
CDP 迭加的爆炸点-接收器对

反射物的深度。CDP 迭加法所要求的时间平移是 $2\Delta t$，这里 $\Delta t=\sqrt{(x^2+h^2)}/\alpha-h/\alpha$。我们可以以下列形式改写它：

$$(t_0+\Delta t)^2-t_0^2=x^2/\alpha^2, \tag{11.114}$$

式中 $t_0=h/\alpha$

若介质如图 11.15 所示那样分层，则走时 t 和距离 x 可写为

$$t=px+\sum_i d_i\sqrt{(1/\alpha_i)^2-p^2},$$

$$x=\sum_i d_i\tan\theta_i=\sum_i d_i\frac{p}{\sqrt{(1/\alpha_i)^2-p^2}}.$$

把走时对 x 展开为 Taylor 级数

$$t=t_0+\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 x+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)_0 x^2+\cdots,$$

我们求得在 $x=0$ 时有

$$\frac{dt}{dx}=p=0,$$

$$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{1}{\sum_i\frac{d_i\alpha_i}{(1-\alpha_i^2p^2)^{3/2}}}=\frac{1}{\sum d_i\alpha_i}.$$

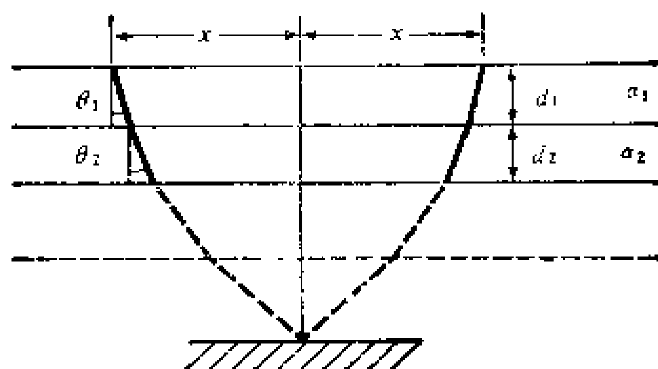


图 11.15

反射物上部的均匀成层结构。d_i，α_i 和 θ_i 分别是第 i 层的厚度、速度和射线与垂直方向间夹角

于是有

$$t = t_0 + \frac{x^2}{2\sum d_i \alpha_i} + \cdots,$$

取平方并略去高于 x^2 的项，则得到

$$t^2 = t_0^2 + \frac{t\, x^2}{\sum d_i \alpha_i}. \tag{11.115}$$

把此式与 (11.114) 比较，发现

$$\alpha = \left(\frac{\sum d_i \alpha_i}{t_0}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\sum \alpha_i^2 \Delta t_i}{\sum \Delta t_i}\right)^{1/2}, \tag{11.116}$$

式中 $\Delta t_i = d_i/\alpha_i$ 是第 i 层中的垂直走时。这表明，根据(11.114)，计算时间平移 $2\,\Delta t$ 需要使用的合适的均匀速度应是加权的均方速度(11.116)，而不是简单的平均速度。Sheriff (1968, 1969) 出版了地球物理勘探术语汇编，于是水平距离 $2\,x$ 称为错位，时间平移 $2\,\Delta t$ 称为正常时差。当接收点的高度和低速地表层厚度的有变化时，则必须把台站校正包括于时差中，台站校正值称为静态校正， 勘探地球物理学中 CDP 迭加是静态校正和正常时差校正后记录的迭加。

尽管有关速度分布已有的知识对于成功地运用 CDP 迭加是很重要的，但仍可以从近似速度分布做起以多种方式改进迭加。例如，Schneider 和 Backus（1968）采用根据初始速度模型所得的不同错位的数据计算了 CDP 迭加。由于初始模型中的误差所造成的迭加之间的差可用互相关计算测定，并用于校正初始模型的误差。另一方法是如 Carotta 和 Michon（1967）所作的，采用几个尝试速度值，对最终 CDP 迭加的振幅取极大，从而测定最佳速度。

11.5.2 震源机制已知时自由振荡谱峰的识别

现在讨论在球对称不旋转的地球内由地震激起的自由振荡问题。从第八章我们知道，振荡由不同频率的简正振型组成，这些频率是由不同的角和方位以及别的阶数标明的与深度有关的本征函数表示。若已知震中、震源深度和地震的断层面解，则可用第八章描述的方法计算出一给定频率的简正振型产生的运动。假定有一点源，则每个振型的时间函数的形状在地球的所有台站上都是相同的，但振幅和符号则因台而异。

假设我们从世界标准地震台网收集了震源参数已知的地震的许多地震图，并根据震源参数所作特殊振型的理论预测来校正符号，（若理论符号为正，则记录的符号不变；但若理论符号为负，则记录的符号需相反。）然后时间不改变，对所有这些校正了的地震图求代数和。此结果将增强与特殊振型有关的信号并减少其它振型，迭加后记录的 Fourier 变换将比较清楚地显示所需振型的频谱峰。先对记录求 Fourier 变换，用 π 对不同符号作相位校正，然后把它们迭加起来，可得到同样的结果。

Mendiguren（1973）第一个将该方法应用于世界标准地震台网所得的哥伦比亚一次深源大地震的数据。该方法不仅改善了谱分析的分辨率，而且使许多谱波能有唯一的、清晰的识别，因为如图 11.16 所示，该方式增强了指定阶数的振型，而压缩了相邻的振型。后来，Gilbert 和 Dziewonski（1975）采用类似方法

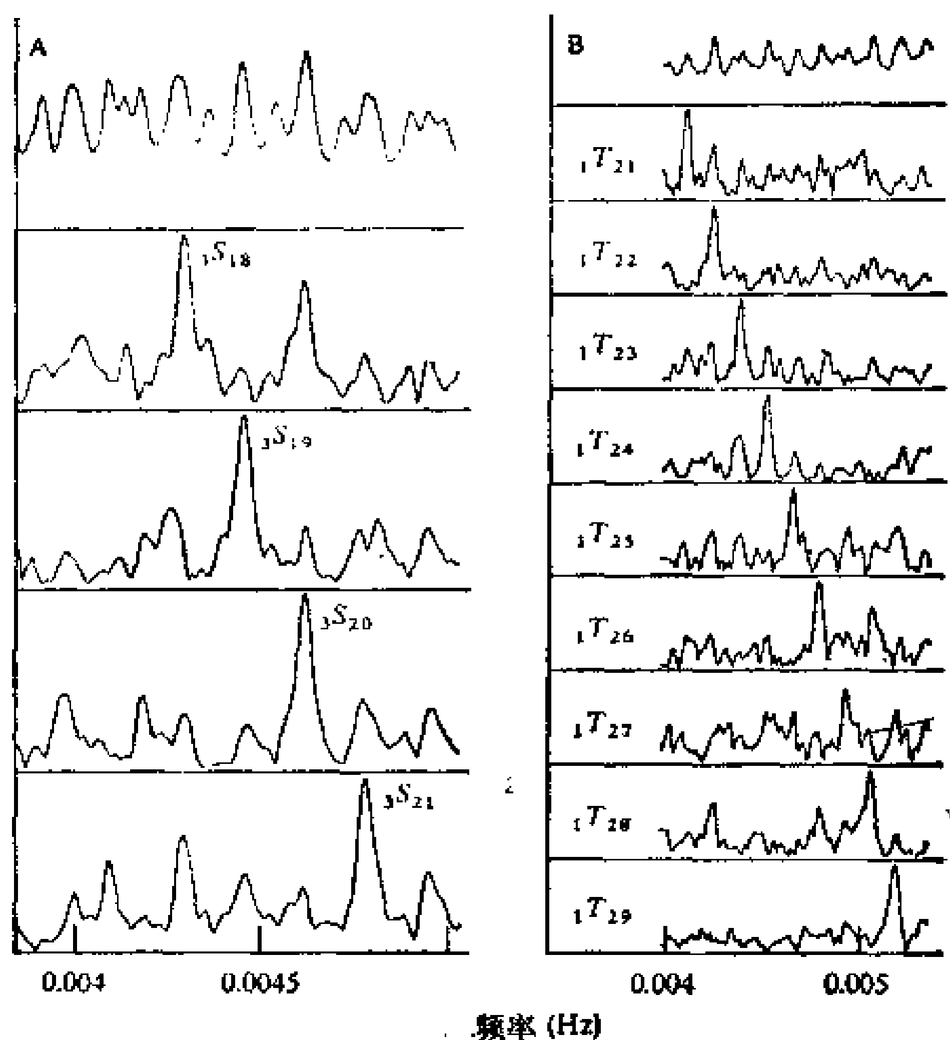


图 11.16

余纬度分量（a）中第三高阶球型振型 $_3S$ 的自由振荡频谱峰和方位分量（b）中第一高阶扭转振型 $_1T$ 的自由振荡谱峰。最上边的谱是所有台站上绝对谱振幅之和。其余的谱是作了符号校正迭加后的结果（引自 Mendiguren, 1973）

识别了几百个新振型。

11.5.3 高阶振型频散的测量

在讨论面波分析的一般问题时(11.3.1节)，我们强调了分离不同振型的重要性，并提到了几种可能的分离技术。Nolet(1975, 1976) 采用西欧的长周期地震台网，成功地分离了Rayleigh波直至六阶的高阶振型。

Nolet 的方法是根据 11.4.3 节介绍的聚束法的想法从近似波数谱开始的。设第 j 台站的地震图为$d_j(t)$，其Fourier 变换为 $D_j(\omega)$。采用震中距 Δ_j，忽略台站校正，就把问题简化成一维空间问题，对波数 k（沿大圆路径）的射线输出的 Fourier 变换则由下式给出：

$$\hat{D}(k,\omega)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} D_j(\omega)\exp(-ik\Delta_j). \qquad (11.117)$$

对每张地震图作适当选择，我们可以假定 $D_j(\omega)$ 由少量振型组成，每个振型具有(11.11)的形式：

$$D_j(\omega)=\sum_n F_n(\omega)\exp[ik_n(\omega)\Delta_j+\phi_n(\omega)], \quad (11.118)$$

式中$k_n(\omega)=\omega/c_n(\omega)$。为了简便，振幅$F_n(\omega)$和震源相位$\phi_n(\omega)$假定与台站无关。将(11.118)代入(11.117)，则得

$$\hat{D}(k,\omega)=\sum_n F_n(\omega)\exp[i\phi_n(\omega)]H(k_n(\omega)-k), \quad (11.119)$$

式中 $H(k)=\sum_j\exp(ik\Delta_j)$ 称为"台阵响应"。$|H(k)|^2$ 就是(11.104)引入的权函数W。11.4.3节中我们证明了，射线输出的功率谱$\hat{P}$是具有权函数W的功率谱的加权平均值。在形如(11.118)的面波的情况下，波数谱由以 k 表示的给定ω的δ函数组成，射线输出谱$\hat{D}(k,\omega)$成了加权的和移动的台阵响应之和。

若沿大圆有均匀而密集分布的许多台站，则台阵响应 $H(k)$ 便接近δ函数的所需形式。当台站数很小时，$H(k)$会有靠近主瓣的大侧瓣，产生干扰真实峰值的虚假峰值。为解决这问题，我们先采用群速度窗。设窗函数为 $W(U,t)$，该函数只在波以群速度U到达时刻的前后才打开一段时间间隔，我们先计算开窗后的谱

$$D_j(\omega,U)=\int_{-\infty}^{\infty} d_j(t)W(U,t)\exp(i\omega t)dt, \quad (11.120)$$

然后计算波数 k 的射线输出

$$D(k,\omega,U)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}D_j(\omega,U)\exp(-ik\Delta_j). \quad (11.121)$$

图 11.17 左边显示了射线输出功率谱 $|D(k,\omega,U)|^2$ 的一个实例，它是角阶数$\left(kr_{\oplus}-\frac{1}{2};\ r_{\oplus}\text{是地球的半径}\right)$和一给定 ω 的 U 的函数、所用台站数为 13 。这种情况下的数据是由基频Rayleigh 波振型和几个高频 Rayleigh 波振型组成的合成信号。等值线的间隔为 3 分贝。这些振型的真实位置由实心三角形表示。在该图上我们发现许多虚假峰。

通过下列程序可清除虚假峰。我们先规定 ω 和 U，并且把 $\hat{D}(k,\omega,U)$ 只作为 k 的函数进行分析，然后求 $\hat{D}$ 为最大时 k 的值，叫做 k_{max}，假设该最大峰值不是由于侧瓣产生的，且这里存在真实振型，于是从 $\hat{D}$ 减去该振型的分布。为了保证得到所遵循的迭代过程的稳定性，引入回路增益因子 $\gamma(0<\gamma\leqslant1)$ 并从 $\hat{D}$ 中减去 $\gamma\hat{D}(k_{max},\ \omega,\ U)H(k_{max}-k)$。上述过程以某残差重复，在每次迭代时记录 $k_{max}^{(i)}$ 和 $D(k_{max}^{(i)},\ \omega,\ U)$。当对 k 的整个范围积分后的残差振幅变得小于初始值的某一分数时，迭代终止。重做波数谱，采用的只是台阵响应的主瓣 $H_0(k)$，并把 $\sum_i\gamma\hat{D}(k_{max}^{(i)},\omega,U)H_0(k_{max}^{(i)}-k)$ 加到最后的残差上去。

右图表示取 $\gamma=4$ 对图 11.17 左边所示的数据采用上述清除过程所得的结果。大多数虚假峰确实被清除了。

使用该方法，Nolet 对亚洲东部地区的几次地震在西欧台阵上测定了 Rayleigh 波相速度，示于图 11.18。实曲线是平滑数据后得到的，虚曲线则代表 Gutenberg 模型的理论值。

11.5.4 互相关滤波器

现在讨论由噪声 n_t 和信号 s_t 组成的数据

$$d_t=n_t+s_t$$

式中 n_t 是如(11.51) 中定义的具有离散功率密度 $P_k^{(n)}$ 的平稳时

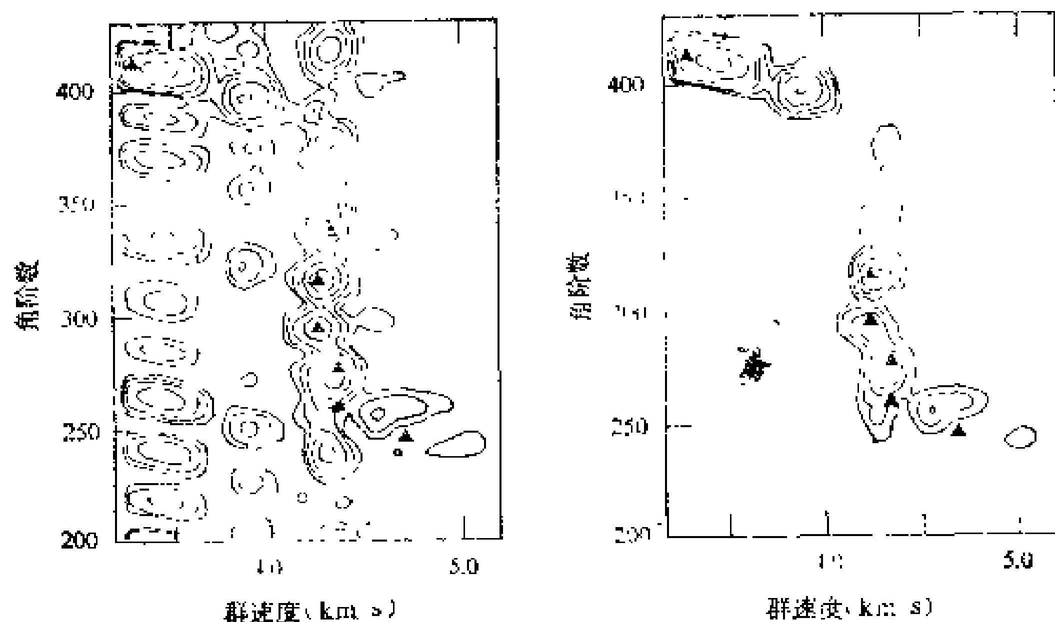


图 11.17

左图表示波束输出谱$|\hat{D}(k,\omega,U)|^2$的一个实例，对一给定的ω，它是群速度U和角阶数$\left(kr_e-\frac{1}{2}\text{，这里 }r_e\text{ 是地球的半径}\right)$的函数，右图表示清除波束输出谱的结果。三角形表示振型的真实位置（引自 Nolet，1976）

间序列，s_t是瞬时信号。与s_t具有同样形状的脉冲响应但时间上相反的滤波器称为互相关滤波器或匹配滤波器，它经常成功地应用于勘探和天然地震研究

让我们先估计用这样的滤波器可得到多大增益的信噪比。如11.3.6节中所示，噪声功率$\langle n^2\rangle$用离散功率密度$P_k^{(n)}$表示为

$$\langle n^2\rangle=\sum_{k=1}^{N-1}P_k^{(n)}\frac{\Delta\omega}{2\pi},\tag{11.122}$$

式中$\Delta\omega=2\pi/(N\Delta t)$。注意到$P_k^{(n)}$涉及到频率$k\Delta\omega$，实际上对频率范围做加法。假定噪声功率密度在$k_1<|k|<k_2$范围上是常数$P$，我们写成

$$\langle n^2\rangle=2P(k_2-k_1)\Delta\omega/2\pi$$

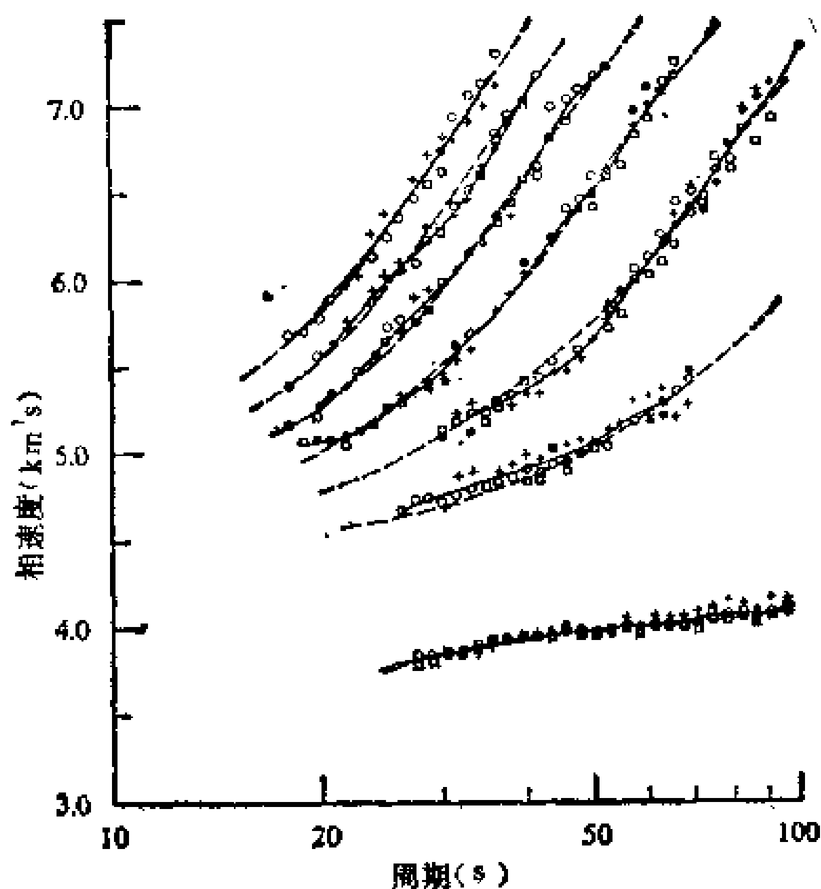


图 11.18
西欧的基阶振型 Rayleigh 波和最初六个高阶振型的相速度。不同的符号相应于不同的事件。虚曲线表示 Guterberg 模型的理论值，实曲线是平滑数据后得到的。(引自 Nolet, 1975)

$$=2PW, \tag{11.123}$$

式中 $W=(k_2-k_1)\Delta\omega/2\pi$ 是频带宽度。

让噪声通过其脉冲响应为 s_{-t} 的滤波器，我们得到由下式给出的输出 n'_t：

$$n'_t=\sum_i n_{t-i}s_{-i}\Delta t. \tag{11.124}$$

输出噪声功率由下式给出：

$$\langle n'^2\rangle=\sum_{k=1}^{N-1}P_k^{(n)}|S_k|^2\frac{\Delta\omega}{2\pi}, \tag{11.125}$$

式中 S_k 是滤波器响应 s_k 的离散 Fourier 变换。取带宽 $W=f_2-f_1$ 以覆盖 s_k 有效存在的频率范围，同时根据（11.123），可将(11.125)改写成

$$\langle n'^2\rangle = P\sum_{k=1}^{N-1}|S_k|^2\frac{\Delta\omega}{2\pi}. \qquad (11.126)$$

应用 Parseval 定理的离散形式，

$$\sum_{k=0}^{N-1}|S_k|^2\frac{\Delta\omega}{2\pi}=\sum_{i=0}^{N-1}s_i^2\Delta t, \qquad (11.127)$$

可写成

$$\langle n'^2\rangle = P\Delta t\sum_{i=0}^{N-1}s_i^2. \qquad (11.128)$$

噪声功率以如下因子增加

$$\frac{\langle n'^2\rangle}{\langle n^2\rangle}=\frac{\Delta t}{2W}\sum_{i=0}^{N-1}s_i^2. \qquad (11.129)$$

另外，该滤波器对输入信号 s_i 的响应是$\sum s_{t-i}s_{-i}\Delta t$，它在 $t=0$ 时具有最大值$\sum_{i=0}^{N-1}s_i^2\Delta t$。在这种情况下，信号振幅将以因子 $\Delta t\sum s_i^2/\max(s_i)$而改善。信噪功率比的增益是

$$\frac{\sum s_i^2}{[\max(s_i)]^2}\cdot 2W\Delta t. \qquad (11.130)$$

例如有一种叫啾声滤波器，它是频率随时间线性地从 f_1 变化到 f_2，具有单位振幅和持续时间为 $N\Delta t$ 的正弦振荡，对这滤波器我们近似地得到

$$\sum_{i=0}^{N-1}s_i^2/[\max(s_i)]^2\sim N/2.$$

这样信噪比的增益是频率带宽（$W\sim f_2-f_1$）和信号持续时间之积．Capon 等（1969）较详细地讨论了使用啾声滤波器以增强频散 Rayleigh 波信号时该滤波器的信噪增益。一般，记录在

标准长周期地震仪上的中等地震的远震 Rayleigh 波随着频率从 0.025 变化到 0.05 赫而延续约 600 秒。相应的时间带宽之积等于信噪功率比中 15 或 12 分贝增益的因子。实际 Rayleigh 波列不是相同振幅的，以致 $\sum_{i=0}^{N-1} s_i^2/[\max(s_i)]^2$ 之值小于 $N/2$。Capon 等观测到的实际增益是从 6 到 10 分贝。

增强信号的同一原理被成功地应用于反射地震学的机械振动源法。该方法用水压振动器作为能源产生不同频率的正弦波列，记录是与信号波列互相关的。振动器的力量是中等，为 10^4 公斤量级。其信号持续时间为几秒，频率范围为 10—100 赫，信噪功率比的增益可大于 100 倍，重复扫描可进一步增强信号。机械振动源法已日益代替爆炸法，因为它不需要费钱又费时钻炮眼。

互相关滤波器的另一重要应用是 Dziewonski 和 Hales (1972) 详细讨论过的无失真时间域窗的数据的预处理。假定信号的相位谱预先已大体知道，则先得到未开窗时整个时间长度的 Fourier 变换。大致已知的相位 $\phi_0(\omega)$ 是从观测相位中减出来的，然后取其 Fourier 逆变换。上述过程等效于应用一个互相关滤波器，其频率响应具有单位谱密度和给定的带负号的已知相位谱 $\phi_0(\omega)$。

若相位校正值是精确的，已滤波的信号将集中在零延迟附近，并且相对于延迟具有偶函数的形状，因此，我们采用其中心为零延迟的对称窗。因为互相关滤波器把信号能量集中在零延迟附近，窗长度便可以缩短，从而减少了噪声的影响。进而，由于对称信号上对称窗没有引入相位失真，因此由开窗产生的信号失真的破坏性影响就减到最低限度。

然后我们重新计算已开窗数据的 Fourier 变换并取得对近似相位谱 $\phi_0(\omega)$ 的相关性。迭代此过程直至不再要求进一步相关为止。

Tukey(1959) 提出用互相关滤波器进行相位校正或补偿，作为消除面波产生的传播效应，以便求出面波在震源处的辐射图案。

安艺(Aki，1960)成功地应用该方法于 Love 波和 Rayleigh 波，表明了面波在研究地震机制中的可用性。

11.5.5 波谱比

如 11.3 节所论及的，地震图经常被认为是一系列线性滤波器的输出，每个滤波器表示单独因素的作用。因此，取两张地震图的波谱比，便可消除某些共有因素的效应。

例如，Berckhemer(1962) 对同一台站记录的同一震中、但震级不同的两次地震取了两张地震图间的波谱比，从而成功地分离了震源尺度对地震谱的效应。同样，Ben-Menahem(1961) 的方向函数，在震源相反方位上两台站间的波谱比是用来分离断层破裂传播效应的。

有几种波谱比是用于消除震源效应的。环绕全球的面波的衰减和频散可根据单台观测的各波群间的波谱比而得到 (Satô，1958)。沿波路径在两个台站上面波的波谱比被大量应用于测量沿该路径的衰减和频散。由远震体波产生的垂直分量和水平分量位移间的波谱比已被用于研究地壳结构 (Phinney，1964)。曾作过不少尝试以应用波谱比分离某些因子和清除另一些因子。

然而，当噪声存在时，波谱比是个很危险的量，因为它极为多变。假设我们对时间序列的有限采样作 Fourier 变换，并把其绝对值平方标成能量谱密度，正如 11.3.7 节所论及的，能量谱密度遵循具有两个自由度的 χ^2 分布，因此其均值的均方根偏差等于其均值本身，具有共同均值的这样两个能量谱之比将遵循具有 2×2 个自由度的 F 分布。我们求得该比率将处于 1/19 和 19 之间的概率是 90%。

现在让我们讨论根据几次独立观测在两台站上获取各信号之间的最佳波谱比估计的问题。信号对不同观测点可能是不同的，但在信号对之间的波谱比是共同的。在一给定频率 ω 处，我们把共同比率写成 $re^{i\theta}$，这里 r 是振幅比，θ 是相位差。r 和 θ 都是 ω 的函数。

假设两台站的噪声遵循互相无关的 Gauss 分布，但数据的余弦和正弦变换还会如 11.3.6 节中述及的那样遵循 Gauss 分布。分别把在第 i 台站上第 k 个数据的余弦变换和正弦变换写作 $C_k^{(i)}$ 和 $S_k^{(i)}$，把其均值表示为$\langle C_k^{(i)}\rangle$和$\langle S_k^{(i)}\rangle$。设噪声有零均值，则有

$$\frac{\langle C_k^{(2)}\rangle + i\langle S_k^{(2)}\rangle}{\langle C_k^{(1)}\rangle + i\langle S_k^{(1)}\rangle}=re^{i\theta} \tag{11.131}$$

或

$$\langle C_k^{(2)}\rangle = r\cos\theta\langle C_k^{(1)}\rangle - r\sin\theta\langle S_k^{(1)}\rangle,$$
$$\langle S_k^{(2)}\rangle = r\cos\theta\langle S_k^{(1)}\rangle + r\sin\theta\langle C_k^{(1)}\rangle.$$

于是给定数据的联合概率密度函数可写为

$$\frac{1}{(2\pi\sigma_1^2)^n}\exp\sum_{k=1}^{n}\frac{(C_k^{(1)}-\langle C_k^{(1)}\rangle)^2+(S_k^{(1)}-\langle S_k^{(1)}\rangle)^2}{2\sigma_1^2}$$

$$\times\frac{1}{(2\pi\sigma_2^2)^n}\exp\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{(C_k^{(2)}-r\cos\theta\langle C_k^{(1)}\rangle+r\sin\theta\langle S_k^{(1)}\rangle)^2}{2\sigma_2^2}$$

$$+\frac{(S_k^{(2)}-r\cos\theta\langle S_k^{(1)}\rangle-r\sin\theta\langle C_k^{(1)}\rangle)^2}{2\sigma_2^2}\Big],$$

式中 σ_1^2 和 σ_2^2 是台站 1 和 2 的噪声的余弦和正弦变换的方差。r 和 θ 的最大似然估计可通过对参数的上述概率求极大而获得。根据 Pisarenko(1970) 的观点，在进行一些代数运算以后，我们求得 θ 和 r 的最大似然估计是

$$\hat{\theta}=\tan^{-1}G/F,$$

$$\hat{r}=\frac{V-ZU}{2(F^2+G^2)^{1/2}}+\sqrt{\left(\frac{(V-ZU)^2}{4(F^2+G^2)}+Z\right)}, \tag{11.132}$$

式中

$$U=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(C_k^{(1)})^2+(S_k^{(1)})^2],$$

$$V=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(C_k^{(2)})^2+(S_k^{(2)})^2],$$

$$F=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[C_k^{(1)}C_k^{(2)}+S_k^{(1)}S_k^{(2)}\right],$$

$$G=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[C_k^{(1)}S_k^{(2)}-C_k^{(2)}S_k^{(1)}\right],$$

Lowes(1971)指出最大似然估计 $\hat{\theta}$ 可改写为

$$\tan\hat{\theta}=\frac{\sum a_k A_k \sin\theta_k}{\sum a_k A_k \cos\theta_k}, \qquad (11.133)$$

式中

$$C_k^{(1)}+iS_k^{(1)}=a_k\exp(i\lambda_k),$$
$$C_k^{(2)}+iS_k^{(2)}=A_k\exp(iA_k)$$

$\theta_k=A_k-\lambda_k$。换言之，$\tan\hat{\theta}$ 是 $\sin\theta_i$ 的加权均值与 $\cos\theta_i$ 的加权均值之比，权重正比于两个振幅之积。图 11.19 表示了 θ 的简单几何解。

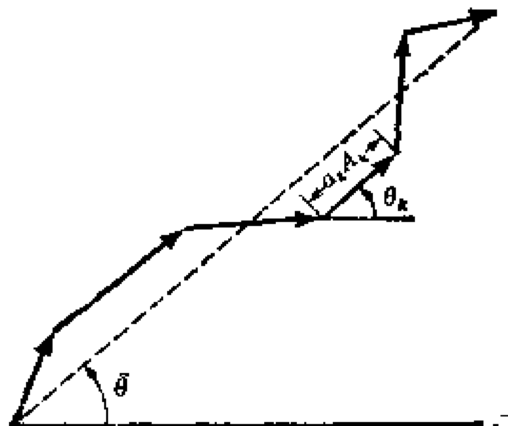


图 11.19
相位差最大似然估计的图解

Patton(1978) 在研究穿过欧亚的 Rayleigh 波的频散和衰减时使用了振幅比和相位差的最大似然估计的 Pisarenko 公式(11.132)。他发现该方法对长于 40 秒左右的周期很有效，但对较短周期却给出了不可靠的结果。这可能是因为长周期波的起伏是由仪器和地球中的背景噪声引起的，获取 Pisarenko 公式所用

的统计模型可用于这种背景噪声。相反，周期短于40秒左右的波的起伏（传播距离在4000公里左右)可能是由散射、多路径干扰和别的波的干扰产生的。这类信号产生的噪声用Gauss噪声的迭加来模拟可能是不合适的。对这些短波，在对数振幅和线性相位角范围里，使观测波谱和理论波谱匹配可得到较为可靠的结果。

建议进一步阅读的文献

Beauchamp, K. G. *Signal Processing Using Analog and Digital Techniques*. London: George Allen and Unwin Ltd., 1973.

Beauchamp, K. G. *Exploitation of Seismograph Networks*. Leiden: Nordhoff International Publishing, 1975.

Blackman, R. B., and J. W. Tukey. *The Measurement of Power Spectra*. New York: Dover Publishers, 1958.

Brigham, E. O., *The Fast Fourier Transform*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1974.

Claerbout, J. F. *Fundamentals of Geophysical Data Processing With Applications to Petroleum Prospecting*. New York: McGraw-Hill, 1976.

Dizewonski, A. M., and A. L. Hales. Numerical analysis of dispersed seismic waves. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations* (Metbods in Computational Physics Vol. 11). New York: Academic Press, 1972.

Gold. B., and C. M. Rader. *Digital Processing of Signals*. New York: McGraw-Hill, 1969.

Peacock, K. L., and S. Treitel. Predictive deconvolution, tbeory and practice. *Geophysics*, **34**, 155--160, 1969.

Robinson, E. R. *Statistical Communication and Detection*. London: Charles Griffin and Co., 1967.

问　题

11.1　设计一个实验，以测量在两台间波传播路径上的面波的相速度。假设我们使用地面噪声安静期间发生在 $\Delta=90°$，$M_s=3\frac{1}{2}$ 的地震，在相速度测量时你能达到什么样的精度？请用(11.18)给出的公式、对面波和地面噪声的波谱数据，可参考图 10.9，10.10 和 10.11。

11.2　探讨这样一个分层半空间，该层与半空间之间的阻抗比 $\beta_1\rho_1/\beta_2\rho_2$ 是不同的。列出一递归滤波器式子，使它通常能用式(11.24)从地表所观测地震图产生入射平面波。用(11.33)得到相应的频率响应函数。使用 11.3.6 节的结果，求出入射波为白噪声时地表运动的自相关和功率谱。

11.3　考虑一具有下式给出的 Z 变换响应的递归滤波器

$$F(z)=\frac{(z-1)(z+1)}{(z-c)(z-c^*)},$$

式中 $c=(1+h)e^{i\omega_0\Delta t}$。以(11.32)和(11.33)的形式写出滤波器。证明滤波器中心频率和带宽分别由 ω_0 和 $h\omega_0$ 来测定。

11.4　求(11.104)中定义的地震仪以 x 和 y 的等间距组成的方台阵的台阵响应和权函数 $W(\xi,\eta)$。讨论作为地震数目和间距的函数的侧瓣效应和分辨率。

11.5　编制 Jeffreys-Bullen 走时表时，认为残差遵循其概率密度为

$$f(t)=\frac{1-\varepsilon}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma^2}\right]+\varepsilon g(t)$$

的统计分布，上式中第一项是(11.42)给出的 Gauss 分布，$g(t)$是表示走时分布中非常缓慢衰减的平滑变化的函数，

假定 ε 很小，证明均值的最大似然估计（11.4.2 节）是由加权均值 $\bar{t}=\sum w_i t_i/\sum w_i$ 给出的，而观测走时 t_i 的权重 w_i 由

$$w_i=\frac{1}{1+\mu\exp[(t_i-\bar{t})^2/2\sigma^2]}$$

给出，式中 μ 是尾部振幅与 $f(t)$ 的峰值之比。

第十二章　地震学中的反演问题

地震学家的主要任务之一是根据在地球表面所得数据测定地球内部的结构。最终我们要找出一种通过处理整个地震图能给出结构和震源参数的方法。就本书而言，我们已经研究了“正演问题”的解，就是说，对地球结构和地震震源模型，我们已求出了如何计算可观测的地震运动的特性，这就是走时、频散曲线、近场谱与强地面运动、自由振荡周期、远场波形和完整的地震图。“反演问题”是把这些计算所得的特性与数据进行比较，以便了解地球结构和地震震源。凡是正演问题的解已知，则通过反复尝试可提供一种反演方法：模型的参数在某种特定基础上重新调整，直至发现观测到的量与数据之间存在某种可接受的吻合为止。这种方法立即带来在任意一种反演方法中都必须加以考虑的主要问题：该模型是否适合用于解释数据?它是否是唯一的?若不是唯一的，则事实上我们从特定数据组究竟得到有关该模型的哪些认识?为回答这最后一个最关键的问题，反复尝试法通常并不合适，因为必须作如蒙特卡罗法同样多次数的尝试。现在对某些有限的数据组已研究出好得多的反演方法。我们最初使用的两个数据组是：(i) 通过某一构造的地震射线走时；(ii) 从该构造散射回来的反射地震图。我们将探索的其余反演方法可应用于(iii)任意一组数据。该方法要求基本模型中的小变化会产生可能观测到的小变化，并且与这组数据相应的初始模型是已知的。满足这些标准的数据组又是整个地震图中一个有限的子数据组。至此，用于反演的数据组(iii)包括地方或区域范围内的面波频散，全球范围的自由振荡本征频率，以及从地震图的某些部分选出的波形。在本章内，我们将探寻根据这三类数据组中的每一类可得到哪些有

关地球内部结构的认识，并导出数据反演的公式

我们先来讨论经典的、在地球模型内传播的体波走时的反演问题。在该地球模型中，地震波速只取决于深度或离地心的距离。在没有低速层时，速度随深度的分布，能用 Herglotz (1907) 和 Wiechert(1910) 所得的公式唯一地确定。我们还将根据 Gerver 和 Markushevitch(1966)的工作导出可应用于包括低速层情况的公式。

然后我们将探讨根据反射地震图可揭示有关地球内部什么信息的问题。现在只知道在一维介质中一维波的最简单情况（即平面波入射到其特性只在波传播方向变化的介质中）下，这一基本问题的解答。尽管这种情况太简单了，无法直接应用于实践，但无论如何，它提供了对所涉及问题的物理理解。

我们将发现，反射地震图不能用来测定弹性常数和作为深度函数的密度，而只能提供作为走时函数的阻抗。我们将根据 Claerbout(1968)和 Ware 与 Aki (1969) 的研究成果，导出连续和离散情况下的反演公式。

对竖向不均匀介质中面波频散数据反演的解析解几乎不知道。但是在短波情况下，运用只可用于短波的 WKBJ 法，高桥 (Takahashi, 1955) 把 Love 波相速度曲线和剪切波速-深度函数之间的关系简化为 Abel 积分方程的形式。

我们的结论是反演问题现有的解析解的可用性是非常有限的，因为这些解对介质和波传播理论的假设都过于简单。在缺乏对数据直接反演的方程时，通常采用反复尝试法。在这种状况下，我们先对波源和介质作一推测，预测应观测到什么，并把预测结果与实际观测结果相比较。对描述波源和介质的模型参数取各种可能的选择，重复此过程，直至预测值和观测值令人满意地吻合。随着计算机日益广泛的应用，通过在可能的参数空间范围内进行均匀的或随机的扫描，系统地探寻令人满意的模型已是切实可行的了。

若模型参数的很小的扰动与可观测量的变化结果线性相关，则反复尝试过程可迅速而系统地进行。如果要求预测数据与观测数据间的残差为最小，则初始模型参数的校正值可作为其系数是初始模型函数的线性方程的解。重复上述过程，直至该解收敛，则可得令人满意的模型

线性方程组的特性由建立数据和模型参数间关系的矩阵给出。我们将根据 Lanczos(1961) 在数据和模型空间相互关系的一般讨论中的论点，去理解观测值和参数间的相互关系。

为描述模型的细节，常常需要大量参数。相反，每个单独数据的不确定性随着根据给定数据测定的参数数目的增加而增加。因此，必须权衡分辨率和精度的要求。若数据误差的统计特性已知，那么对分辨率和精度之间的权衡关系进行定量讨论是可能的，Backus 和 Gilbert 在一系列文章中对这个问题进行了分析，引起人们对反演问题的广泛兴趣。

除了数据的已知统计特性外，有时模型参数的统计特性也可能知道，或者我们可能只对用特定方法平滑后的模型特性感兴趣 根据 Franklin (1970) 的论点，我们将讨论在数据和模型参数统计特性都已知时数据反演的最佳方式。

12.1 走时反演

12.1.1 Herglotz-Wiechert 公式

走时数据是把波群初动到时 $T(X)$ 作为震源与在地表测得的接收点间距离 X 的函数。让我们先考虑展平地球的情况，其中速度 $c(z)$ 只随深度 z 变化。据(4.45 a)可知，由

$$p=\frac{\sin i}{c(z)} \tag{12.1}$$

定义的射线参数 p 在一给定射线路径上是常数，上式中 i 是射线路径和竖直方向间的夹角(见图 12.1)。在最深点 $i=\pi/2$，具有

参数 p 的射线穿透的最大深度 $Z(p)$ 由式 $C(Z(p))=1/p$ 给出。具有参数 p 的射线在到达地表时所走的水平距离 $X(p)$（见图 12.1）由式

$$X(p)=2\int_0^{Z(p)}\tan i\,dz$$

$$=2\int_0^{Z(p)}\frac{p\,dz}{\sqrt{(c(z))^{-2}-p^2}} \tag{12.2}$$

给出，这里我们利用了(12.1)。同样，相应的走时 $T(p)$ 由

$$T(p)=2\int_0^{Z(p)}\frac{(c(z))^{-2}dz}{\sqrt{(c(z))^{-2}-p^2}} \tag{12.3}$$

给出。

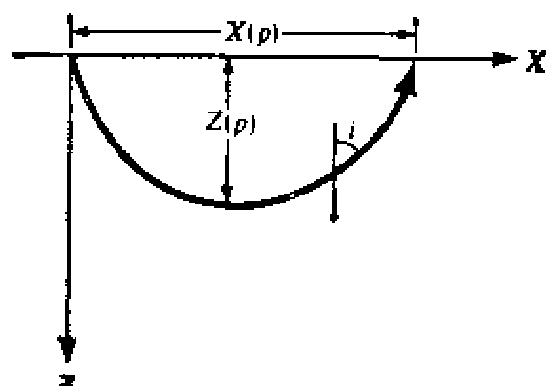


图 12.1
展平地球模型中的射线路径

由于 $dT/dX=\sin i_0/c(0)$，式中 $c(0)$ 和 i_0 分别是 $c(z)$ 和 i 在地表的值。射线参数 p 可直接从走时数据 $T(X)$ 测定为

$$p=\frac{dT}{dX}. \tag{12.4}$$

因此函数 $X(p)$ 和 $T(p)$ 都是在地表上可观测的量。走时反演问题是根据观测所得的 $X(p)$ 及 $T(p)$ 求 $c(z)$。

在球对称地球的情况下，射线参数不再与水平相速度有关，而与角速度有关。正如(4.45 b)中所示，射线参数 p 由

$$p=\frac{r\sin i}{c(r)} \tag{12.5}$$

确定，在球对称地球模型的射线路径上，它是不变的，式中 i 是射线路径和离开地心的半径方向间的夹角（图 12.2）。对于都在地表的震源和接收点，震源与射线出射点间的角距离 $\Delta(p)$ 可写成

$$\begin{aligned}\Delta(p)&=2\int_{r_p}^{r_\oplus}\tan i\frac{dr}{r}\\&=2p\int_{r_p}^{r_\oplus}\frac{1}{\sqrt{(r/c)^2-p^2}}\frac{dr}{r},\end{aligned} \tag{12.6}$$

式中 $r_\oplus$ 是地球的半径，r_p 是射线最深点处的半径（图 12.2） 相应的走时 $T(p)$ 由下式给出：

$$T(p)=2\int_{r_p}^{r_\oplus}\frac{(r/c)^2}{\sqrt{(r/c)^2-p^2}}\frac{dr}{r}. \tag{12.7}$$

相应于展平地球的关系式(12.4)，我们有球状地球的关系式

$$p=dT/d\Delta. \tag{12.8}$$

只要用 $r_\oplus\Delta(p)$ 代替 $X(p)$，$r_\oplus\ln(r_\oplus/r)$ 代替深度 z，$c(r)r_\oplus/r$ 代替 $c(z)$，$p/r_\oplus$ 代替射线参数 p，则可根据展平地球的相应公式（12.1）到（12.4）直接得到上述球状地球的公式（12.5）到（12.8），因而，解展平地球的反演问题就已经足够了。球状地球问题的解可通过上述变量代换立即求得（也参阅补充 9.9）。

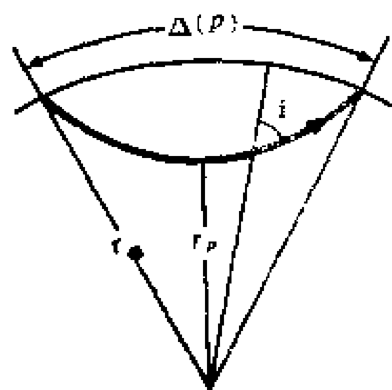


图 12.2

球状地球模型中的射线路径

应用速度-深度函数（12.2）和（12.6）表示传播距离的公式可简化为 Abel 积分公式的形式，其反演问题已解决。

用 $(c(z))^{-2}$ 作为积分变量，先将方程(12.2)改写成：

$$\frac{X(p)}{2p} = \int_0^{z(p)} \frac{dz}{\sqrt{(c(z))^{-2} - p^2}}$$

$$= \int_{c_0^{-2}}^{p^2} \frac{dz/d(c^{-2})}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} d(c^{-2}), \qquad (12.9)$$

式中 c_0 是在 $z=0$ 时的速度。积分 $c^{-2}=p^2$ 的上限是根据下列事实确定的：$Z(p)$是射线最深点的深度，在这点上速度 c 是射线参数 p 的倒数。若用 $t(x)$代替 $X(p)/2p$，用 x 代替 p^2，用 ξ 代替$(c(z))^{-2}$，则式(12.9)就与补充 12.1 中的式(9)相同。于是，相应于补充 12.1 中式(10)的反演问题的解可写为

$$z(c) = -\frac{1}{\pi} \int_{c_0^{-2}}^{c^{-2}} \frac{X(p)/2p}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} d(p^2)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{c_0^{-1}}^{c^{-1}} \frac{X(p)}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} dp, \qquad (12.10)$$

补充 12.1

Abel 问题

Abel 问题(1826)指的是：当一上升和返回的粒子所取的时刻已知为该粒子初速度的函数时，如何确定其势垒的形状。该粒子被无摩擦地限制在势垒表面，并在重力作用下移动。由于能量守恒，可用 $gx=\frac{1}{2}v_0^2$ 求出初速度为 v_0 时，该粒子能达到的最大高度 x。请看图 A 所示的沿着从最大高度点 $P(x,y)$往下到初始点 O 这条路径的运动。粒子在高度 ξ 处的势能等于$-mg(x-\xi)$，动能等于$\frac{1}{2}m(ds/dt)^2$，这里 m 是粒子质量，s 是沿路径测得的距离。由于没有摩擦损耗，我们有

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(x-\xi). \qquad (1)$$

对两边取平方根并积分，则得

$$t(x) = \int_0^x \frac{ds/d\xi}{\sqrt{2g(x-\xi)}} d\xi. \qquad (2)$$

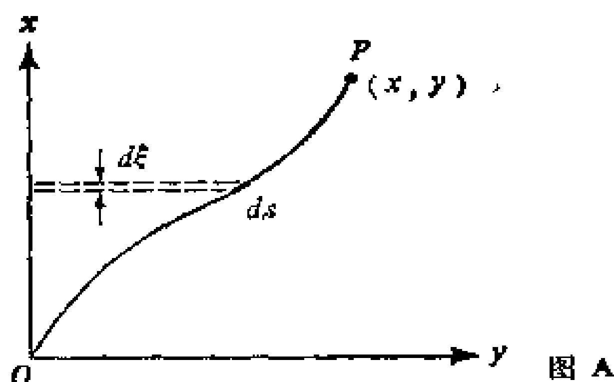


图 A

以 Abel 积分方程形式将式(2)改写成

$$t(x)=\int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi, \tag{3}$$

我们的反演问题是已知 $t(x)$ 求 $f(\xi)$。

通过下列步骤来求解。首先，用 $dx\sqrt{\eta-x}$ 乘(3)的两边，对 x 从 0 到 η 积分，并改变积分次序：

$$\int_0^\eta \frac{t(x)dx}{\sqrt{\eta-x}}=\int_0^\eta \frac{dx}{\sqrt{\eta-x}}\int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi$$

$$=\int_0^\eta f(\xi)d\xi\int_\xi^\eta \frac{dx}{\sqrt{\eta-x}\sqrt{x-\xi}}. \tag{4}$$

为了覆盖阴影区(图 C)，即原积分区(图 B)，所以还改变了积分限。通过使变量代换 $x=\xi\cos^2\theta+\eta\sin^2\theta$，可以求得(4)中对 x 的积分是个常数，即

$$\int_\xi^\eta \frac{dx}{\sqrt{\eta-x}\sqrt{x-\xi}}=\int_0^{\pi/2}2\,d\theta=\pi. \tag{5}$$

于是式(4)可写成

$$\int_0^\eta \frac{t(x)dx}{\sqrt{\eta-x}}=\pi\int_0^\eta f(\xi)d\xi. \tag{6}$$

对式(6)中 η 求导，有

$$\frac{d}{d\eta}\int_0^\eta \frac{t(x)dx}{\sqrt{\eta-x}}=\pi f(\eta). \qquad (7)$$

用ξ代替η，则得标准形式

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi \frac{t(x)dx}{\sqrt{\xi-x}}, \qquad (8)$$

这是积分方程(3)的解。

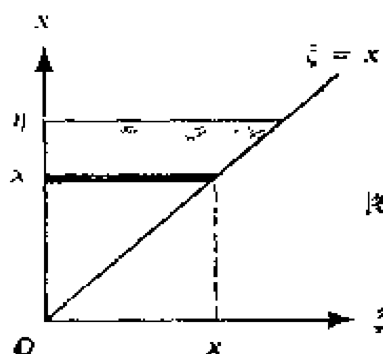


图 B

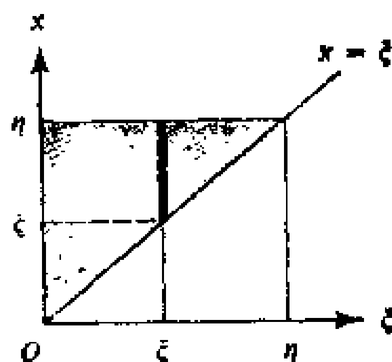


图 C

根据 Bôcher(1909)的见解，Abel 的积分方程(3) 具有连续解(8)的充分必要条件是：

(i) $t(x)$必须是连续的，

(ii) $t(o)=0$，

(iii) $t(x)$的导数有限，至多带有限个间断点。

最严格的限制是要排除$t(x)$的间断性(这意味着，对一在零时给定的速度，将有两个不同的返回时间)。若势垒具有峰谷起伏时，就会发生这种情况。在走时反演情况下，这与存在低速层的情况相对应。

最后，改变式(3)和(8)中的变量，$\xi\to a-\xi$ 和 $x\to a-x$，则得到比较适宜于我们问题的公式：

$$t(x)=\int_x^a \frac{f(\xi)}{\sqrt{\xi-x}}d\xi \qquad (9)$$

和

$$f(\xi)=-\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_\xi^a \frac{t(x)dx}{\sqrt{x-\xi}}. \qquad (10)$$

式的两边去掉了对 c^{-2} 的导数。从观测走时数据 $X(p)$，式(12.10)给出了给定速度 c 对应的深度 z。它可用分部积分改写成下列形式：

$$z(c)=-\frac{1}{\pi}\int_{\cosh^{-1}(c/c_0)}^{0} X(p)d(\cosh^{-1}(pc))$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{X(c^{-1})} \cosh^{-1}(pc)dX, \qquad (12.11)$$

式中利用了 $X(c_0^{-1})=0$。根据(12.11)由上面提及的变量变换得出球状地球的结果

$$\ln[r_e/r(c)]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\Delta(r/c)} \cosh^{-1}(pc/r)d\Delta. \qquad (12.12)$$

应用中选择比率 r/c 的特定值。通过 $\Delta=\Delta(p)$ 曲线，(12.12) 中积分的上限已知，求积分（通常取 $p\geqslant r/c$）则给出 $\ln(r_e/r)$ 的值。因而对于一个 $r/c(r)$ 的值，r 是已知的，这样就能确定速度剖面 $c=c(r)$ 上的一点。式(12.10)到式(12.12)统称为 Herglotz-Wiechert 公式。

Herglotz-Wiechert 公式成立的条件可根据补充 12.1 讨论的 Bôcher 条件获得。把它们变成走时问题，发现这些公式可应用于 $X(p)$ 导数不连续的情况，而不能应用于 $X(p)$ 本身不连续的情况。当速度随深度递减时（对球状地球，$c(r)/r$ 随 r 递增），出现后一种情况，因此，Herglotz-Wiechert 公式不能用于包含低速层的情况，然而它可应用于引起走时曲线三重值的速度快速增长情况。

图 12.3 所示是三重值的实例。对于在速度快速增长地带上方达到最低点的射线，穿透得越深的射线出射点通常离源点越远。但由转换带产生的强折射能使射线出现在接近震源处，如图 12.3 所示。若射线在转换带下面达到最低点，走时曲线的特性回复正常。走时 $T(X)$ 和射线参数 $p=dT/dX$ 也都表明为 X 的函数。走时曲线的正常分支是向下凹的，但在回折分支处则是向

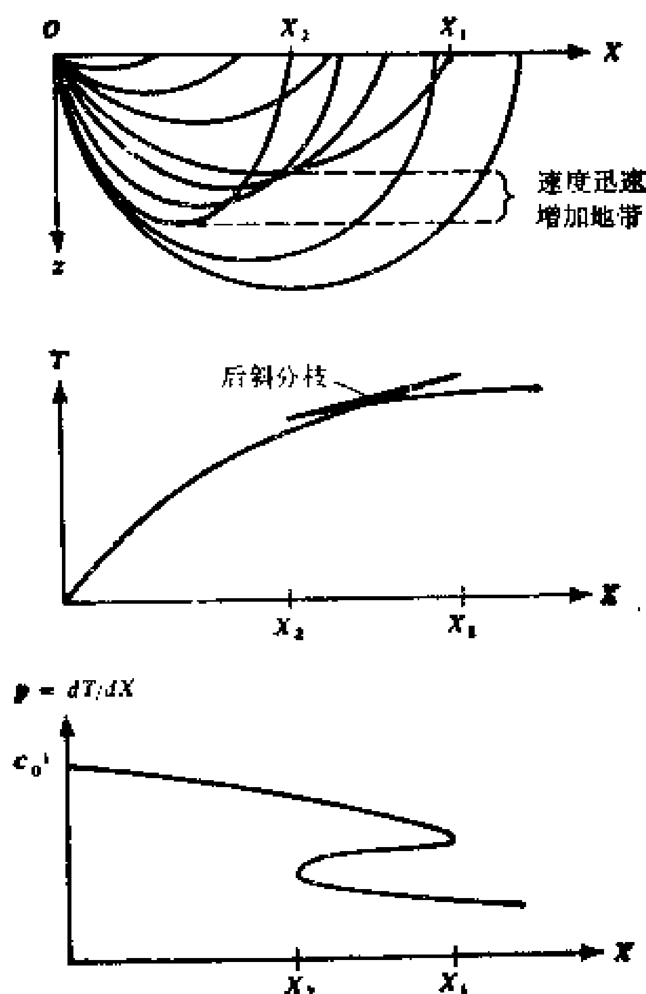


图 12.3

因速度随深度迅速增长产生的走时曲线三重值

上凸的，因为那里 $d^2T/dX^2=dp/dX>0$。如图 12.3 下图所示，$X(p)$ 明显地是 p 的单值连续函数，因此Herglotz-Wiechert公式(12.10)可用于这种情况。

让我们把该公式应用于 Slichter(1932)提出的一种极端的例子，在均匀半空间上覆盖一均匀层，速度增加是不连续的，如图 12.4 所示。速度 c_0 在上层传播的直达波记为 p，在半空间介质内折射和反射的波分别记为 p_n 和 $p_{M}p$。与它们相应的走时分支在刚发生全反射的距离处相遇，这时临界角 i_s 满足 $\sin i_s=c_0/c_1$。相应的 X-p 关系示于图的最下部。

由于反射分支 P_MP 的走时 $T(X)$ 由

$$T(X)=\frac{2}{c_0}\left[h^2+\left(\frac{X}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

给出，因而可容易地得到该分支的 $X(p)$ 的显式：

$$X(p)=\frac{2hp}{\sqrt{1/c_0^2-p^2}}\qquad 当\ c_1^{-1}<p<c_0^{-1}。$$

将此结果代入反演公式(12.10)，则当 $c_0^{-1}>c^{-1}>c_1^{-1}$ 时，

$$\begin{aligned}z(c)&=-\frac{1}{\pi}\int_{c_0^{-1}}^{c^{-1}}\frac{2hp\,dp}{\sqrt{c_0^{-2}-p^2}\sqrt{p^2-c^{-2}}}\\&=h\end{aligned}\tag{12.13}$$

这样便求出速度为 c_0 到 c_1 范围中的正确深度 h。

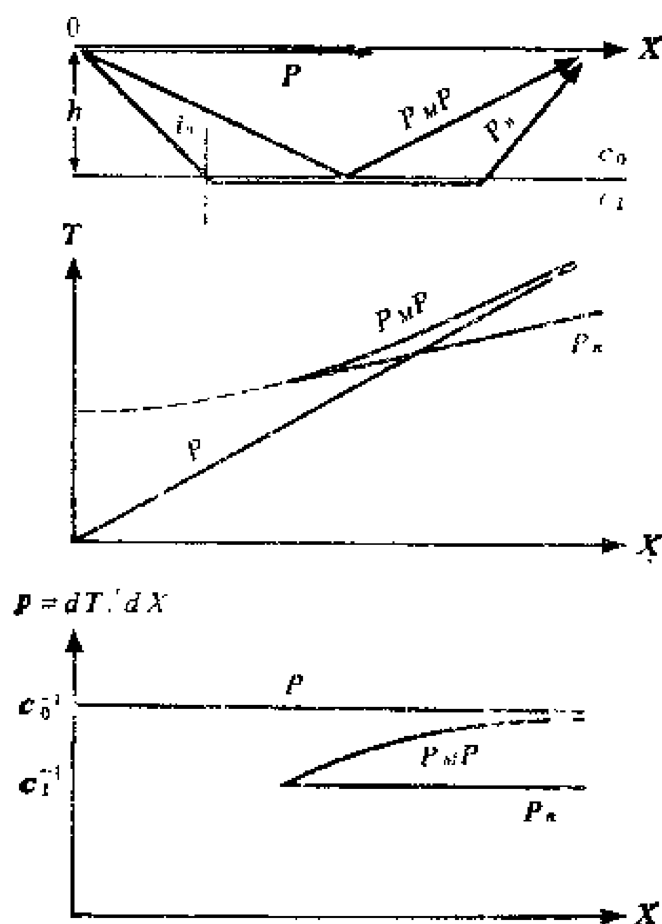


图 12.4

半空间上方均匀层的射线路径和走时

为了成功地反演有三重值的走时数据，必须正确识别正常的分支和回折分支。这不仅要求正确识别初至，而且要正确识别后至。实际上，由于较早到达的尾波的干扰，正确判读后至震相到时常常很困难。

假设只有初至是正确识别的，并能找出它是由如图 12.5 所示的两个线段组成，则存在无数可提供同一初至的结构。在研究沿加利福尼亚海岸的地壳结构时，Healy(1963)对不同的 n 考虑了分 n 层的不同结构，这些结构都给出相同的初至，并使"隐蔽层"产生的所有初至都通过两条初至线的相交部分。图 12.6 给出对于 $n=1,2,$和 50 时的结果。50 层的情况接近 Slichter (1932)所得的连续结构的公式 $c(z)=c_0\cosh \pi z/X_c$，该结构的所有射线出现在交点上(X_c是到此点的水平距离)。图 12.6 表示出只知初至时，走时资料解释的非唯一性。

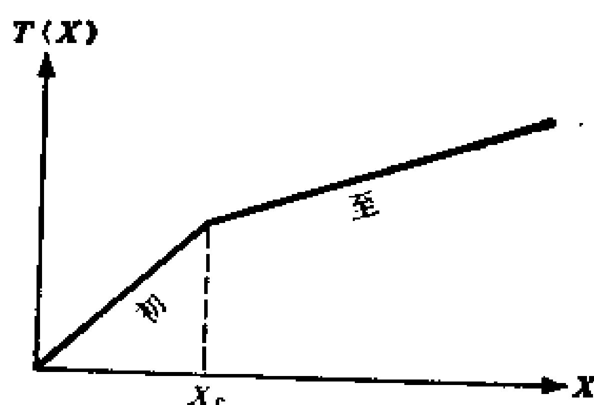


图 12.5
初至走时已知如图所示，但后至到时未知。这种情况下问题的非唯一性表示于图12.6

12.1.2 包括低速层结构的走时反演

在展平地球模型中，从某一深度 z_1 起，若速度 $c(z)$ 开始随着深度 z 而降低（或在球状地球模型中，角速度 $c(r)/r$ 开始随 r 的逐渐减小而降低），则直到该速度回复到它在 z_1 处所具有的

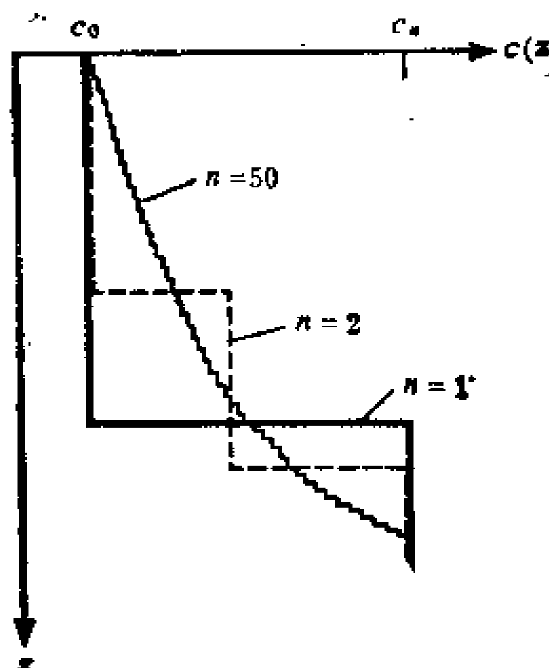


图 12.6

图 12.5 给出的同样初至到时的速度分布(n 是层数)(引自 Healy,1963)

值之前，如图 12.7 和 9.14 所示，在该深度范围内有最深点的射线就不存在。这种情况下，走时曲线出现有缺口的阴影区，且在 X-p 关系式中出现间断，这违反可应用 Herglotz-Wiechert 反演公式的条件。从这样的间断走时曲线，有关地球结构我们可了解些什么呢？

Slichter(1932)分析了这个问题，并得出某些有意义的结论。由于在低速层(LVL)中不会存在射线的最底部点，因此，整个低速层的速度分布会影响在该层内积分所得的走时。假设用一迭扑克牌模拟低速层中的速度分布，不改变积分所得走时也可将牌弄乱，因此不能根据走时资料确定牌的顺序。

然而，Slichter 根据走时曲线中所观测的间隔 Δx 和 ΔT 求出低速层厚度的上界（见图 12.8）。如图 12.7 所示，确定低速层的上下界和射线路径与竖直方向间的角 i，我们有

$$\frac{\Delta X}{2}=\int_{z_1}^{\bar{z}_1}\tan i\,dz \qquad (12.14)$$

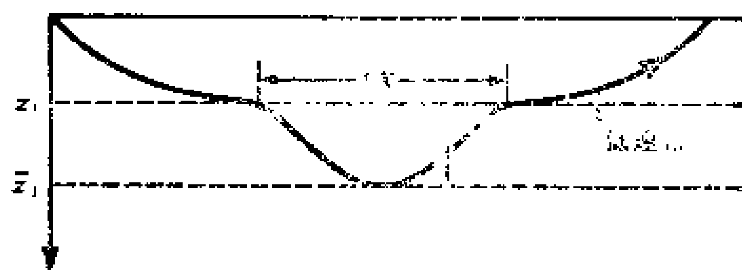


图 12.7
含有低速层的地球表层几何射线路径和走时

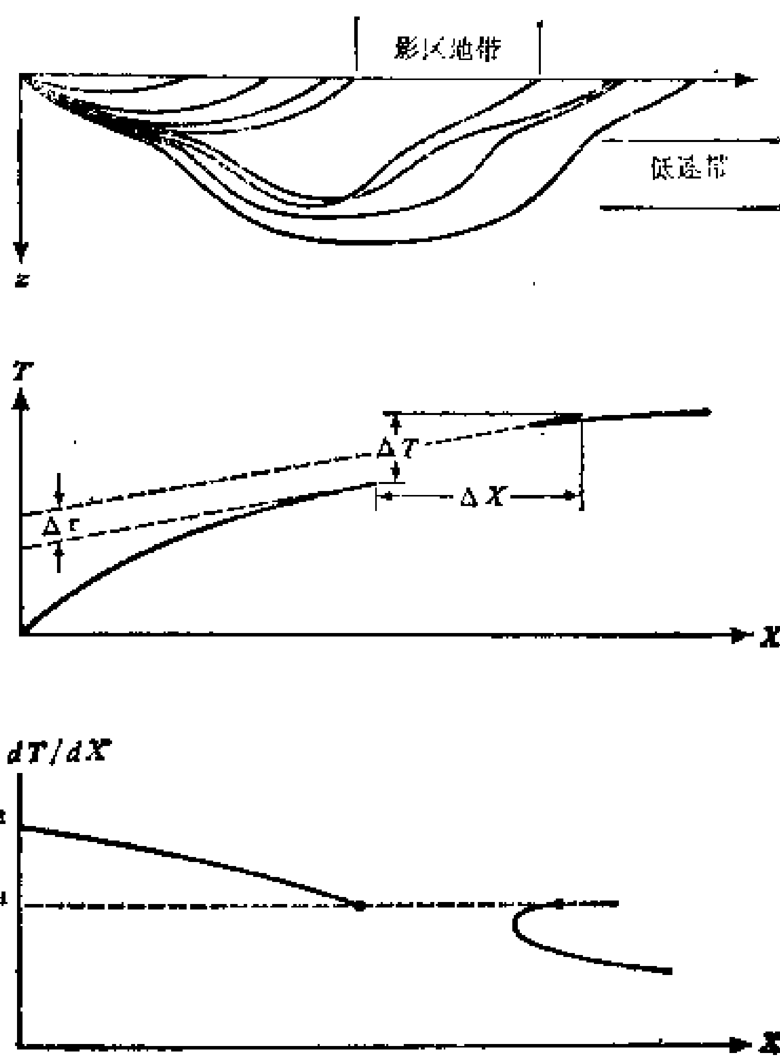


图 12.8
含有低速层结构的射线路径和走时

和

$$\frac{\Delta T}{2}=\int_{z_1}^{\bar{z}_1}\frac{dz}{c(z)\cos i}$$
$$=\int_{z_1}^{\bar{z}_1}\frac{p_1dz}{\sin i\cos i}$$
$$=p_1\frac{\Delta X}{2}+p_1\int_{z_1}^{\bar{z}_1}\cot i\,dz,\qquad(12.15)$$

式中 p_1 是与低速层的上、下界相切射线的射线参数，即 $p_1=c^{-1}(z_1)=c^{-1}(\bar{z}_1)$。对给定的 ΔT 和 ΔX，在 $z_1<z<\bar{z}_1$ 的范围内tan i 和 cot i 的积分都是固定的。若低速层具有均匀的速度，i 是不变的，积分便成了 αh 和 h/α，其中 $\alpha=\tan i$。另外，若低速层由一组均匀层组成，则相应的积分便为 $\sum\alpha_nh_n$ 和 $\sum h_n/\alpha_n$，其中 h_n 是第 n 层的厚度，α_n 是该层的 tan i，对给定的 ΔT和 ΔX，这些积分也是给定的，因此，其乘积对两种情况是相同的：

$$\alpha h\cdot h/\alpha=h^2=(\sum h_n/\alpha_n)(\sum\alpha_nh_n).$$

除非这些层都具有相同值的 α_n，否则右边大于 $(\sum h_n)^2$，因此结论是：对均匀速波，低速层的厚度最大。换言之，对一给定的 ΔT 和 ΔX，存在着低速层厚度的界限。令 $z_1<z<\bar{z}_1$，(12.14)和(12.15)中的 $c(z)=c_L$，则可求得此界限，

$$\frac{\Delta X}{2}=\frac{p_1(\bar{z}_1-z_1)_{max}}{(c_L^{-2}-p_1^2)^{1/2}},$$
$$\frac{\Delta T}{2}=\frac{c_L^{-2}(\bar{z}_1-z_1)_{max}}{(c_L^{-2}-p_1^2)^{1/2}}.\qquad(12.16)$$

消去上式中的c_L，根据走时曲线中观测到的间隔，便求得低速层厚度的最大估算值。

Gerver 和 Markushevitch (1966) 对该问题作了较为一般而完整的分析。求解低速层厚度上界的公式(12.16) 也可用他们的方法得到。

让我们先回顾一下(9.22)中引入（对球状地球问题）的函数 $\tau(p)$，它由

$$\tau(p)=T(p)-pX(p)\qquad(12.17)$$

定义。$\tau(p)$的物理意义是很清楚的；它是走时曲线 $T=T(X)$ 的切线与 $X=0$ 轴的截距，而 p 是该切线的斜率。据（12.2）和（12.3），我们有

$$\tau(p)=2\int_0^{Z(p)}\sqrt{c^{-2}(z)-p^2}\,dz, \qquad (12.18)$$

它随 $Z(p)$单调增，随 p 单调减。图 12.9 表示观测所得的地球

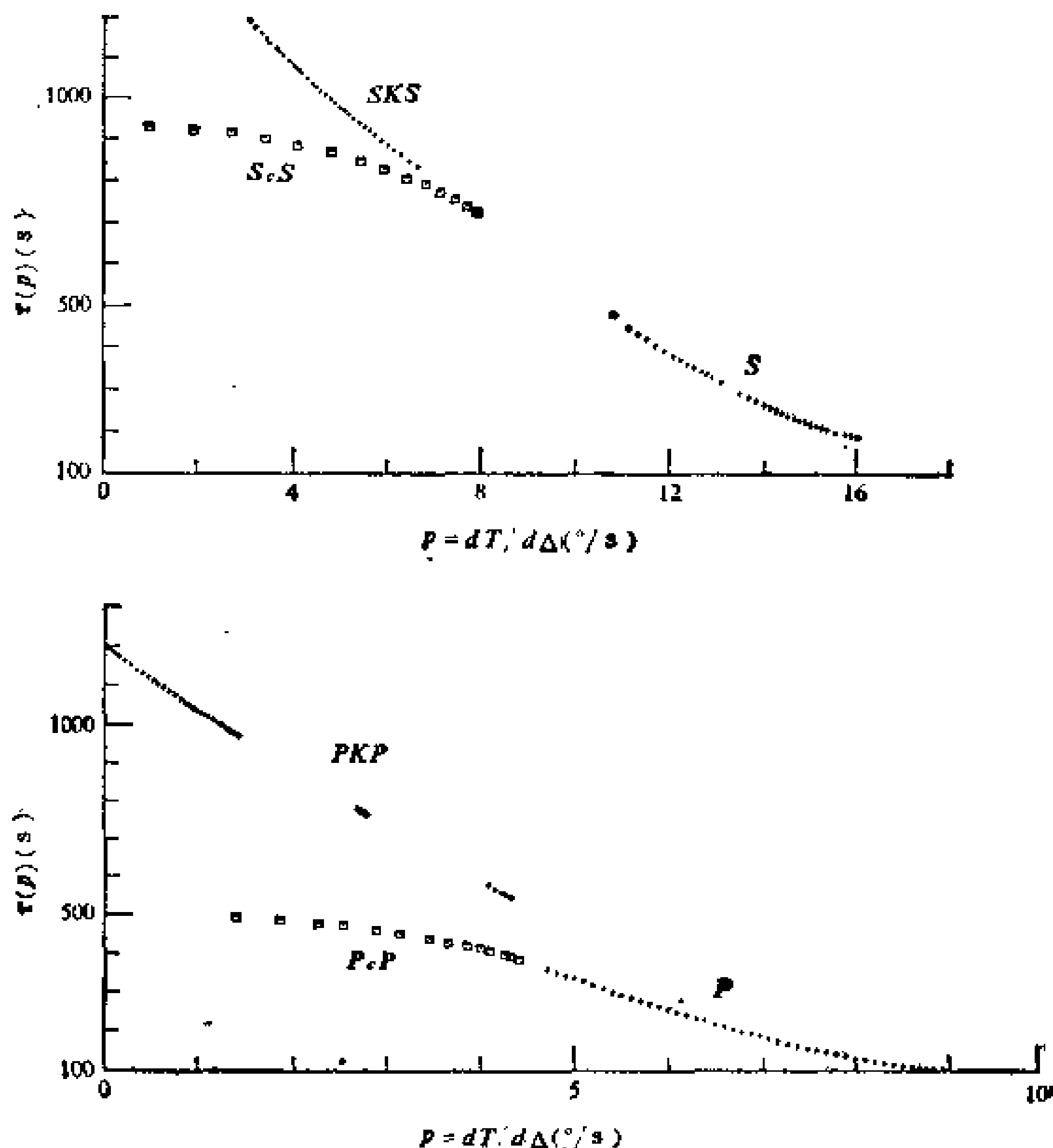


图 12.9

上图是 S，SKS 和 S_cS 的 $\tau(P)$。下图是 P，PKP 和P_cP的$\tau(P)$
（引自 Johnson and Gilbert，1972）

内 P 波和 S 波的 $\tau(p)$。

由于低速层产生的 $\tau(p)$ 的跳跃可写成

$$\Delta\tau = \Delta T - p_1 \Delta X. \tag{12.19}$$

请注意，$\tau(P)$ 包含了根据走时数据可得的全部信息。由于 $dT/dX = p$，则

$$\frac{d\tau}{dp} = \frac{dT}{dp} - p\frac{dX}{dp} - X(p) = -X(p). \tag{12.20}$$

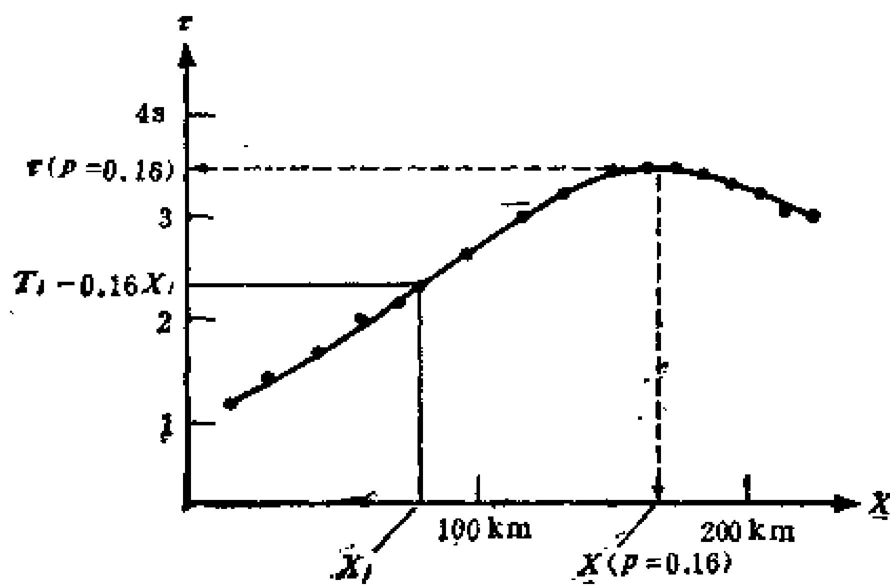
补充 12.2

$\tau(p)$ 的测量

Bessonova 等(1974)采用了根据一组走时数据 (T_i, X_i) 获取 $\tau(p)$ 的一种简单而可靠的方法。该方法是基于当 p 固定而 p_0 变化时 $T(p_0) - pX(p_0)$ 的极值特性。

首先，我们注意到，在 $p_0 = p$ 处 $[T(p_0) - pX(p_0)]$ 正是 $\tau(p)$，其次，注意到 $\partial/\partial p_0 [T(p_0) - pX(p_0)] = (p_0 - p)\, dX/dp_0$，所以在 $p_0 = p$ 处 $[T(p_0) - pX(p_0)]$ 有极值。

Bessonova 等的方法如下：对给定的一组走时数据 (T_i, X_i)，如图所示，把 p 固定，以 X_i 为函数作 $T_i - pX_i$ 图，它在 $X(p)$ 处取极值，$T_i - pX_i$ 的极值等于 $\tau(p)$。



$X(p)$的反演公式可按关系式$d\tau(p)=-\lambda(p)dp$以$\tau(p)$写出。例如，式(12.10)简单地变成

$$Z(p)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\tau(p)}\frac{d\tau}{\sqrt{v^2(\tau)-p^2}},\tag{4}$$

式中$v(\tau)$和$\tau(p)$互为反函数，$z(c)=Z(p)|p=\ldots$。

只要$\tau(p)$已知，则可以测定$X(p)$，然后测定$T(p)$，还可求出低速层产生的走时曲线的间隔ΔX和ΔT。这是因为$d\tau/dp$在p_1+0和p_1-0间的差给出ΔX，再将已知的ΔX和$\Delta\tau$代入(12.19)可得ΔT

现在来求可用于包括低速层的速度随深度分布的反演公式。我们从下列恒等式开始：

$$Z(p)=\int_0^{Z(p)}dz\cdot\frac{1}{\pi}\int_{p^2}^{[c(z)]^{-2}}\frac{d(q^2)}{\sqrt{[c(z)]^{-2}-q^2}\sqrt{(q^2-p^2)}}.\tag{12.21}$$

用$q^2=p^2\cos^2\theta+c^{-2}\sin^2\theta$代入，就很容易证明上面的恒等式。

上述积分的区域是图12.10中q-z图的阴影区。先固定z，对q从p到$1/c(z)$积分，然后将结果再对z从0到$Z(p)$积分。对应于顶部和底部的深度分别为z_k和$\bar{z}_k$的第k个低速带，其射线参数用p_k来表示。

由于$Z(p)$是射线参数为p的射线最底部点的深度，并且p等于底部速度的倒数，所以除了在没有回折点的低速带里以外，作为P的函数$Z(p)$是和z的函数$1/c(z)$等价的，对第k个低速带来说，假设曲线$Z(p)$是连接(p_k, z_k)和$(p_k, \bar{z}_k)$两点的一直线。据此，$Z(p)$不随p增加。

改变积分次序，便可将(12.21)改写成

$$Z(p)=\frac{2}{\pi}\int_p^{1/c_0}\frac{qdq}{\sqrt{q^2-p^2}}\int_0^{Z(q)}$$

$$\times\frac{dz}{\sqrt{[1/c(z)]^2-q^2}}+I(p),\tag{12.22}$$

式中 $I(p)$是对图 12.10 中深色阴影区的积分。据(12.2)，

$$X(q)=2\int_0^{z(q)}\frac{q\,dz}{\sqrt{[1/c(z)]^2-q^2}},$$

可将(12.22)改写成

$$Z(p)=\frac{1}{\pi}\int_p^{1/c_0}\frac{X(q)\,dq}{\sqrt{q^2-p^2}}+I(p).\qquad(12.23)$$

上式右边第一项正是 Herglotz-Wiechert 公式，可由观测所得走时数据唯一地测定。低速层的影响 $I(p)$可以由下式得到：

$$当\ p_k>p>p_{k+1},\qquad(12.24)$$

$$I(p)=\sum_{i=1}^{k}\frac{2}{\pi}\int_{z_i}^{\bar{z}_i}dz\int_{p_i}^{1/c(z)}\frac{q\,dq}{\sqrt{[1/c(z)]^2-q^2}\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{2}{\pi}\int_{z_i}^{\bar{z}_i}\tan^{-1}\sqrt{\frac{[1/c(z)]^2-p_i^2}{p_i^2-p^2}}\,dz.$$

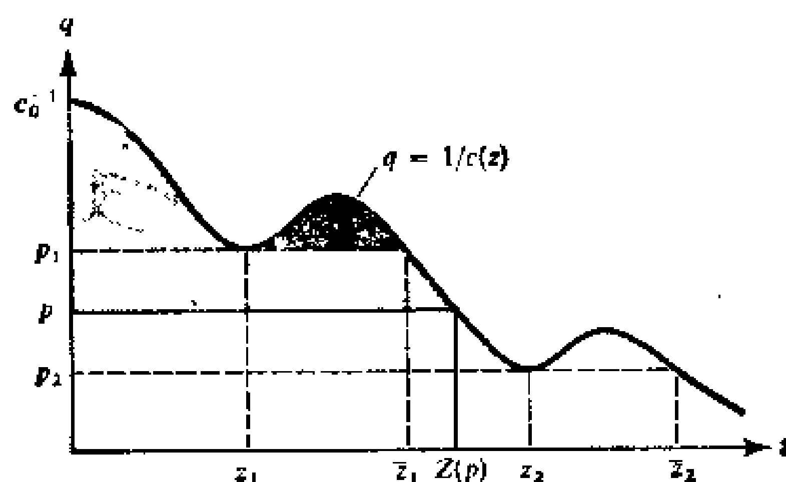


图 12.10

(12.21)的积分范围

Gerver 和 Markushevitch(1966)所得的上述方程(12.23)和(12.24)是 Herglotz-Wiechert 公式对包括低速层情况的推广。

当 $p>p_1$ 时，$I(p)=0$，因而 Herglotz-Wiechert 项给出了解 $Z(p)$，当 $z<z_1$ 时，此解单值地给出了速度-深度函数。

当 $p<p_1$ 时，Herglotz-Wiechert项由观测的走时数据测定。然而，通过整个第二项 $I(p)$，任意一个速度-深度函数 $v(z)$，对于受下述某些约束的低速层可能是已知的。除了第一个低速层的上界面外，别的界面深度 z_k，$\bar{z}_k$ 都是未知的。根据观测数据对于 $c(z)$，z_k 和 $\bar{z}_k$ 的第一个约束是由 $\tau(p)$ 的间断给定的，即

$$\Delta\tau_k=2\int_{z_k}^{\bar{z}_k}\sqrt{[1/c(z)]^2-p_k^2}\,dz. \tag{12.25}$$

根据定义，第二个约束是计算出的 $Z(p)$ 不应随 p 增加。第三个约束是 $Z(p_k+O)$ 和 $Z(p_k-O)$ 必须分别与第 k 层的下界面和上界面的深度 z_k 和 z_k 相符合。如图 12.11 所示，Gerver 和 Markushevitch 给出了一个形如长颈鹿的区域，对两个低速带情况的所有可能解 $c(z)$ 的图都已包括在其中，$c(z)$ 的上限相应于 Herglotz-Wiechert 项。图 12.11 还显示了存在着由(12.16)已给出的低速层深度的上限。

我们上面描述的反演走时数据的特殊方法与 Abel 积分问题

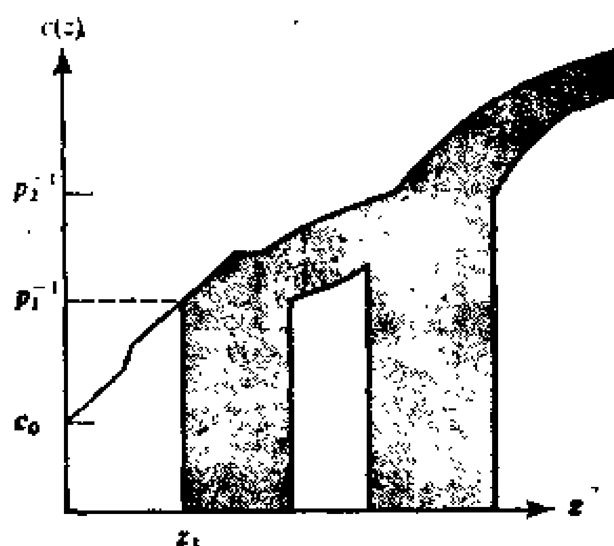


图 12.11

Gerver和Markushevitch(1966)所得的解

的特殊性质密切相关——也就是说，作图法对获取反演已为人们熟知，当然还有其它反演走时数据的方法，Johnson 和 Gilbert (1972) 采用了比较一般的方法、这将在 12.3 节中加以描述。Crosson(1976 a,b)还将这样的方法应用于地方震数据。这样，震源必须同时与结构反演一起测定。

12.2 反射地震图的反演问题

当地震扰动向下传送后，地表上的地震仪便记录下由地球内部返回的反射波。根据称之为反射地震图的记录，我们能发现有关地球内部的什么情况呢？对一维的情况，震源波是垂直传播的平面波，地球的弹性特征也只在垂直方向变化，该反演问题的解已经知道了。前节中对走时反演的讨论，以地震波速度作为深度的函数，而在此则不能这样。我们只能求出阻抗，它是地震波速度和密度的乘积，是垂直走时的函数。在其所包含信息的性质上，走时数据和反射地震图间有根本区别。

先从一维运动方程开始：

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \tag{12.26}$$

式中$\rho(x)$是密度，$E(x)$是弹性常数，若$E(x)=\lambda(x)+2\mu(x)$，则$u(x,t)$可以表示压缩波产生的x方向的纵向位移；若$E(x)=\mu(x)$，则表示剪切波产生的垂直于x方向的横向位移，这里$\lambda(x)$和$\mu(x)$是Lamé常数。这里我们用x表示深度是为了使z用于z变换。

我们将同时考虑介质由离散均匀层组成的较为简单的问题，如图 12.12 所示。对第i层，运动方程为

$$\rho_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=E_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \tag{12.27}$$

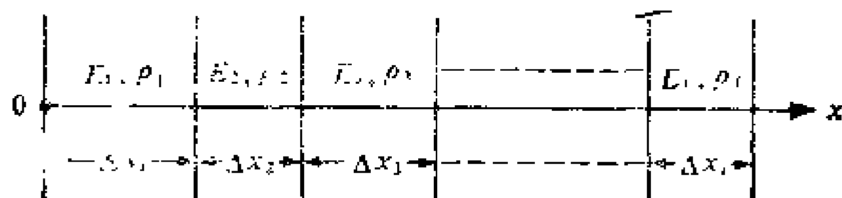


图 12.12
一组均匀层。Δx_i 选得使每层的走时相同

式中 E_i 和 ρ_i 是常数。利用一任意函数 $f_i(t)$，(12.27) 的解可写为

$$u_i = f_i(t \pm x/c_i), \tag{12.28}$$

其中 $c_i=\sqrt{E_i/\rho_i}$。据Goupillaud(1961)，这样选择层厚 Δx_i，以使穿过该层的走时Δt_i对所有的层都一样：

$$\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{c_i} = \Delta t = \text{常数}. \tag{12.29}$$

从直观上可以想到，若Δt取得足够小，这样的一组迭层可以较好地模拟$E(x)$和$\rho(x)$的任何真实变化。

上述离散介质是合适的，因为若波源是作用于分界面的脉冲（比如说，在 $t=0$ 时），则任一分界面上的连续地震运动可表示为只在时间间隔为 $2\Delta t$ 的离散点处存在的一脉冲序列。

若将这样的序列写成

$$s(t) = \sum_n s_n \delta(t - 2n\Delta t), \tag{12.30}$$

其Fourier变换$S(\omega)$是

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(i\omega t)\,dt = \sum_n s_n \exp(2in\omega\Delta t). \tag{12.31}$$

这样，时间域解和频率响应便都用 S_n 表示。令 $z=\exp(2i\omega\Delta t)$，把 (12.31) 改写成

$$S(z) = \sum_n s_n z^n, \tag{12.32}$$

并把 $S(z)$ 称为 z 变换。

现在让我们考虑一下，根据在这样介质的表面($x=0$)所得的反射地震图可发现些什么。

12.2.1 反射地震图的反演

以图 12.13 所示的在第 i 层和第($i+1$)层的分界面上的反射和透射为例。当单位脉冲是从第 i 层入射时，用 r_i 和 t_i 表示反射和透射脉冲。当脉冲从($i+1$)层入射时，则用$\bar{r}_i$和$\bar{t}_i$表示，应用分界面处位移 $u_i=u_{i+1}$和牵引力$E_i\partial u_i/\partial x=E_{i+1}\partial u_{i+1}/\partial x$ 的连续性条件，可得反射脉冲和透射脉冲振幅间的关系式：

$$1+r_i=t_i,$$

$$1+\bar{r}_i=\bar{t}_i, \tag{12.33}$$

$$r_i=-\bar{r}_i=\frac{c_i\rho_i-c_{i+1}\rho_{i+1}}{c_i\rho_i+c_{i+1}\rho_{i+1}}.$$

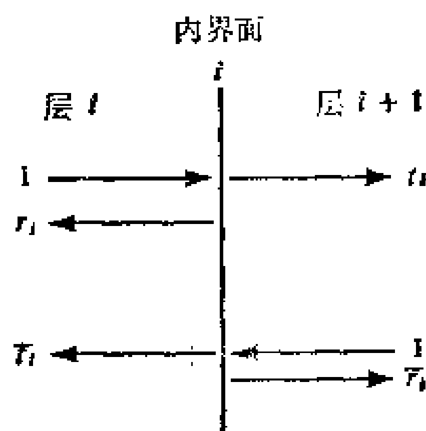


图 12.13

确定反射和透射系数

也可令(5.39)中的射线参数$p=0$，并考虑到反射 P 波符号相反的惯例而得这些公式。

现在我们求解最简单的反演问题。在 $x=0$ 处发送一个脉冲平面波进入图 12.12 的层状介质中，过后将在 $x=0$ 处接收到从介质内许多分界面来的反射波。给定反射地震图后，对于介质我们能说些什么呢？

根据Gerver(1970)，图 12.14 中给出一简单的图解。在图 12.14 中，绘出 x-t 图的波路径。在任一分界面，脉冲到达的时间间隔为 $2\Delta t$。(12.33) 中确定的反射和透射系数，表示每个波路径上的脉冲振幅。在 $x=0$ 处可得到作为 t 的函数的反射地震图。

很容易发现，反射系数r_1是在$t=2\Delta t$时直接观测得到的。根据(12.33)，可求得t_1，$\bar{t}_1$和$\bar{r}_1$。因此，在$t=4\Delta t$时观测到的反射振幅$t_1r_2\bar{t}_1+r_1\bar{r}_0r_1$能唯一决定未知数$r_2$。$t=6\Delta t$时的反射地震图同样能决定$r_3$，余者依此类推。

只要r_1，r_2，…，r_n和地表阻抗值$c_1\rho_1$已知，利用关系式

$$c_{i+1}\rho_{i+1}=\frac{1-r_i}{1+r_i}c_i\rho_i, \tag{12.34}$$

便可迭代测定$c_i\rho_i(i>1)$。因此，根据长度$2n\Delta t$的反射地震图能求出$i=2$到$i=n+1$的阻抗$c_i\rho_i$。我们求阻抗时不是以深度x而是以反射波走时t作为自变量。

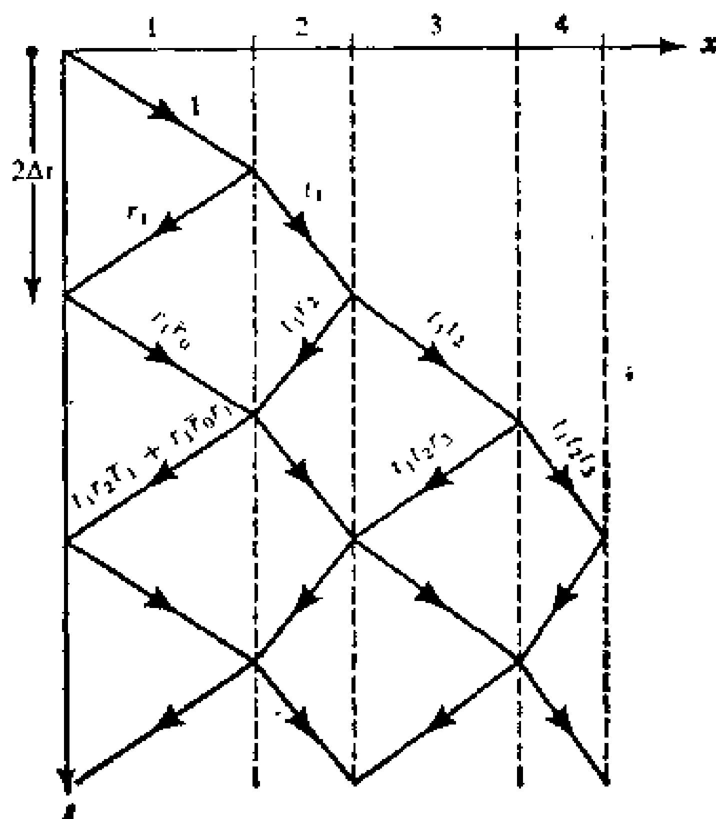


图 12.14

xt平面的多重反射和透射波的路径

对于$E(x)$和$\rho(x)$为x的连续函数的介质，可得到同样的结论。通过变量代换将式(12.26)简化为一维Schrödinger公式。首

先用

$$dx = c(x)d\zeta,$$

$$\zeta = \int^{x} \frac{dx}{c(x)}, \tag{12.35}$$

将自变量 x 变为 ζ，其中 $c(x) = [E(x)/\rho(x)]^{1/2}$，$\zeta$ 是走时。则式(12.26)可写为

$$\frac{\partial^2 u(\zeta,t)}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial^2 u(\zeta,t)}{\partial t^2} = -\frac{d\ln[\rho c]}{d\zeta}\frac{\partial u(\zeta,t)}{\partial\zeta}.$$

其次，用

$$\phi = [\rho c]^{1/2} u \tag{12.36}$$

将应变量 u 变为 ϕ，则有

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = q(\zeta)\phi,$$

式中

$$q(\zeta) = \frac{1}{\eta}\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} \text{ 和 } \eta = (\rho c)^{1/2}. \tag{12.37}$$

当时间关系为 $\exp(-i\omega t)$，我们有

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2} - q(\zeta)\phi + \omega^2\phi = 0, \tag{12.38}$$

这就是位势 $q(\zeta)$ 的一维Schrödinger公式。

如下一节所示，在一定条件下，可根据观测所得反射地震图单值地确定 $q(\zeta)$。如(12.37)所示，从 $q(\zeta)$ 仅可得到作为走时 ζ 的函数的阻抗 η^2，而不能得到更多的了。

因此，在连续和离散这两种情况下，反射地震图仅提供了作为走时的函数的阻抗。下一步的问题是当反射地震图给定时，如何计算作为走时的函数的阻抗。首先考虑离散介质。

12.2.2 离散情况的反演公式

对连续介质，严格推导其反演公式是困难的。因此，我们将根据Claerbout(1968)的工作，详细描述离散情况，然后简略论及对连续介质的模拟结果。我们将证明推导反演公式的基础对两

种情况来说基本上是相同的。在两种情况下，因果关系——即原因发生在效应前——是关键。

为了使图 12.12 中所示离散介质的反演问题公式化，需要得到根据第$(i-1)$分界面的反射波和透射波计算第 i 分界面的这些波的一般公式。如图 12.15 所示，用$D_i\exp[-i\omega(t-x/c_i)]$表示在 x 方向传播的波，称它们为下行波。上行波用 $U_i\exp[-i\omega(t+x/c_i)]$表示。$D_i$和$U_i$是$\omega$的函数。同样，如图 12.15 所示，再定义$D_i'$和$U_i'$。应用图 12.13 定义的反射和透射系数，有

$$\begin{aligned} D_{i+1} &= t_i D_i' + \bar{r}_i U_{i+1}, \\ U_i' &= r_i D_i' + \bar{t}_i U_{i+1}. \end{aligned} \tag{12.39}$$

重新排列上式，得

$$\begin{pmatrix} U_i' \\ \\ D_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}_i - \dfrac{r_i \bar{r}_i}{t_i} & \dfrac{r_i}{t_i} \\ \\ -\dfrac{\bar{r}_i}{t_i} & \dfrac{1}{t_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i+1} \\ \\ D_{i+1} \end{pmatrix}. \tag{12.40}$$

据(12.33)，

$$r_i = -\bar{r}_i \text{ 和 } \bar{t}_i - \frac{r_i \bar{r}_i}{t_i} = \frac{1}{t_i}. \tag{12.41}$$

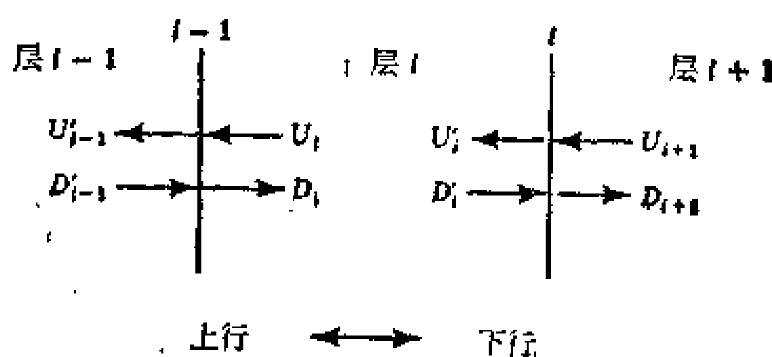


图 12.15
定义上行波和下行波

因而得到一个极简单的关系式，

$$\begin{pmatrix} U_i' \\ D_i' \end{pmatrix} = \frac{1}{t_i}\begin{pmatrix} 1 & r_i \\ r_i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{i+1} \\ D_{i+1} \end{pmatrix}. \tag{12.42}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} U_i &= \exp(i\omega\Delta t)U_i', \\ D_i &= \exp(-i\omega\Delta t)D_i'. \end{aligned} \tag{12.43}$$

结合(12.42)和(12.43)，得

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_i = \frac{1}{t_i}\begin{pmatrix} \exp(i\omega\Delta t) & r_i\exp(i\omega\Delta t) \\ r_i\exp(-i\omega\Delta t) & \exp(-i\omega\Delta t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{i+1}.$$

如前所述写出$z=\exp(2i\omega\Delta t)$，引入$w=\exp(i\omega\Delta t)$，我们有

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_i = \frac{1}{wt_i}\begin{pmatrix} z & zr_i \\ r_i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{i+1}. \tag{12.44}$$

利用上述过程，由第n分界面的上行波和下行波可求得地表的这些波：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_1 &= \frac{1}{w^n}\cdot\frac{1}{t_1t_2\cdots t_n} \\ &\times\begin{pmatrix} z & zr_1 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & zr_2 \\ r_2 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} z & zr_n \\ r_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1}. \end{aligned}$$

可以证明上述矩阵乘积具有下列形式：

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_1 = \frac{1}{w^n}\begin{pmatrix} z^nF(1/z) & z^nG(1/z) \\ G(z) & F(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1}, \tag{12.45}$$

式中

$$F(z) = \frac{1}{t_1t_2\cdots t_n}(1+F_1z+F_2z^2+\cdots+F_{n-1}z^{n-1}),$$

$$G(z) = \frac{1}{t_1t_2\cdots t_n}(r_n+G_1z+G_2z^2+\cdots+G_{n-1}z^{n-1})$$

是$n-1$次多项式；因而$F(z)$和$G(z)$的逆z变换限制在$0\leqslant t\leqslant 2(n-1)\Delta t$的时间范围内，而在此范围外则为零。

用数学归纳法可证明上述结果。假定(12.45)对最初的n层

有效，且用同一形式于下一分界面。为此，给F和G加脚标。建立

$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_1$和$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+2}$的矩阵关系为

$$\frac{1}{w^n}\begin{pmatrix} z^nF_n(1/z) & z^nG_n(1/z) \\ G_n(z) & F_n(z) \end{pmatrix}\frac{1}{wt_{n+1}}\begin{pmatrix} z & zr_{n+1} \\ r_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{t_n}\frac{1}{w^{n+1}}$$

$$\times\begin{pmatrix} z^nF_n(1/z)z+z^nG_n(1/z)r_{n+1} & z^nF_n(1/z)zr_{n+1}+z^nG_n(1/z) \\ G_n(z)z+F_n(z)r_{n+1} & G_n(z)zr_{n+1}+F_n(z) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{w^{n+1}}\begin{pmatrix} z^{n+1}F_{n+1}(1/z) & z^{n+1}G_{n+1}(1/z) \\ G_{n+1}(z) & F_{n+1}(z) \end{pmatrix}. \qquad (12.46)$$

上述结果表明$F_{n+1}(z)$和$G_{n+1}(z)$分别是其常数项为

$$\frac{1}{t_1t_2\cdots t_{n+1}}\text{和}\frac{r_{n+1}}{t_1t_2\cdots t_{n+1}},$$

的、直到z^n项的多项式。由于式(12.45)对$n=1$成立，它对任意n也必定成立。(12.46)中的递归关系对计算$F(z)$和$G(z)$都是方便的。

我们的反演问题是根据在地表观测所得的反射地震图求解一切分界面处的反射系数（或每一层的阻抗）。这是在假设层数是有限的，且第$(n+1)$层是不包括地震震源的半空间这样的情况下进行的。通过解这个问题可发现，根据其记录时间直至$2n\Delta t$的反射地震图，可求得直到第n分界面的反射系数。由于在$t=2(n+1)\Delta t$之前，从第n层外的分界面反射还没有到达，时刻$2n\Delta t$之前的反射地震图与第n分界面外的介质无关，所以有限层数的假设并不限制在该假设条件下所得的反演公式的可用性。

把地表观测到的上行波称为“反射地震图”，并将其Z变换表

示为$R(z)$。相应的下行波由$t=0$时作用的震源脉冲和在自由表面附近产生的上行波$R(z)$的反射组成。震源脉冲的Z变换为1。据（12.33），自由表面的反射系数为+1，因此自由表面的边界条件由下式给出：

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} R(z) \\ 1+R(z) \end{pmatrix}. \tag{12.47}$$

第$(n+1)$层的下行波称为“透射地震图”，并用$T(z)$表示其Z变换。由于假设第n层外没有震源，因此那里的边界条件由下式给出：

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ T(z) \end{pmatrix}. \tag{12.48}$$

将这些条件代入(12.45)，并重新排列，则得

$$\begin{pmatrix} R(z) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{w^n}\begin{pmatrix} z^n F(1/z) & z^n G(1/z) \\ G(z)-z^n F(1/z) & F(z)-z^n G(1/z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ T(z) \end{pmatrix}. \tag{12.49}$$

引入

$$M(z)=F(z)-z^n G(1/z), \tag{12.50}$$

立即求得

$$T(z)=w^n/M(z),$$

$$R(z)=z^n G(1/z)/M(z). \tag{12.51}$$

据（12.45）给出的$F(z)$和$G(z)$的特性，n层介质的$M(z)$是一多项式：

$$M(z)=M_0+M_1 z+\cdots+M_n z^n, \tag{12.52}$$

式中

$$M_0=\frac{1}{t_1 t_2\cdots t_n} \text{和} M_n=\frac{-r_n}{t_1 t_2\cdots t_n}.$$

据（12.51），$M(z)$的物理意义是清楚的。由于$w^n=\exp(in\omega\Delta t)$表示跨过$n$层的单程走时产生的延迟，因此$T(z)/w^n$

是以第 n 分界面初动到时为初始时间的透射地震图的 z 变换。式(12.51)表明，$M(z)$是反褶积滤波器的 z 变换。在时移透射地震图作为输入时，该滤波器的输出是震源脉冲。若震源不是脉冲，则用该滤波器可求得震源波形

据 (12.52)，当$|z|<1$时，$M(z)$ 是解析的，由于$z=\exp(2i\omega\Delta t)$，因此 $M(z)$在 ω 上半平面是解析的，且$1/M(z)$也是解析的。因为当$|z|\leqslant 1$ 时，$1/M(z)$ 没有零点，时间平移的透射地震图不仅在 $t<0$ 时为零，而且也是最小延迟子波（见补充 5.8）。

为了得到反射地震图的反演公式，从（12.50）和（12.51）导出下列公式：

$$
\begin{aligned}
[1+R(z)+R(1/z)]M(1/z) &= F(z)M(1/z)/M(z)+z^{-n}G(z) \\
&=[F(z)M(1/z) \\
&\quad +z^{-n}G(z)M(z)]/M(z) \\
&=[F(z)F(1/z) \\
&\quad -G(z)G(1/z)]/M(z).
\end{aligned}
$$

最后这个表达式的分子等于（12.45）中传播矩阵的行列式。矩阵乘积的行列式等于其行列式之积，且层矩阵的行列式是

$$\det\frac{1}{wt_i}\begin{pmatrix} z & zr_i \\ r_i & 1 \end{pmatrix}=\frac{1-r_i}{t_i},$$

则求得

$$[1+R(z)+R(1/z)]M(1/z)=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1-r_i}{t_i}\right)\Big/M(z). \tag{12.53}$$

如前所述，$1/M(z)$相应于 $t<0$ 时时移为零的透射地震图。在 Z 变换中，这意味着（12.53）的右边没有 z 的负幂次项。将反射地震图写作

$$R(t)=R_1\delta(t-2\Delta t)+R_2\delta(t-4\Delta t)+\cdots$$

$$+R_n\delta(t-2_n\Delta t)\quad\cdots$$

即
$$R(z)=R_1z+R_2z^2+\cdots+R_nz^n+\cdots,$$

并将它代入（12.53），再使用（12.52），可得

$$(1+R_1z+\cdots+R_1z^{-1}+\cdots)(M_0+M_1z^{-1}+\cdots+M_nz^{-n}),$$

此式不应有 z 的负次幂。结果 z^{-1} 的系数必定为零，即

$$M_0R_1+M_1+M_2R_1+\cdots+M_nR_{n-1}=0.$$

考虑直至 z^{-n} 的项，这些方程可概括为下述矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & R_1 & R_2 & \cdots & R_{n-1} \\ R_1 & 1 & R_1 & & \vdots \\ R_2 & R_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & R_1 \\ R_{n-1} & \cdots\cdots & R_1 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1/M_0 \\ M_2/M_0 \\ \vdots \\ M_n/M_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -R_1 \\ -R_2 \\ \vdots \\ -R_n \end{pmatrix}.$$

(12.54)

如（12.52）所示，由于 $M_n/M_0=-r_n$，从时刻 $2n\Delta t$ 之前的反射地震图，即可求出第 n 分界面上的反射系数。从 $n=1$ 开始，对每一步解（12.54），可求得 r_i。然后应用（12.34），可求得作为 i 的函数的阻抗 $c_i\rho_i$。[公式（12.51）和（12.53）显示了一个重要结果，即反射地震图 $R(z)$ 是时移透射地震图 $w^{-n}T(z)$ 的自相关函数的一侧与常数 $\prod_{i=1}^{n}(1-r_i)/t_i$ 之积。Frasier (1970) 用 2×2 矩阵 R，T 和 Z_n 代替标量 r，t 和 z^n，从而将上述结果推广到 P-SV 问题。由于透射地震图不变，若震源和接收器互换（见第二章中互易定理），上述结果提供了把远震的地表记录转换成反射地震图以研究地壳构造的可能。]

12.2.3 连续情况的反演公式

如 12.2.1 节中所述，连续介质的运动方程可简化成一维 Schrödinger 方程，

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2}+[\omega^2-q(\zeta)]\phi=0,\qquad(\text{即 }12.38)$$

式中走时 ξ，规一化场 ϕ 和位势 q 分别由（12.35）、（12.36）和(12.37)定义。若 $q(\xi)<\omega^2$，(12.38)的解是振荡的；若 $q(\xi)>\omega^2$，则该解是指数衰减。因为振荡波不能传递到 $q(\xi)>\omega^2$ 的区域中去（补充 9.3），相应于 $q(\xi)=\omega^2$ 的点 ξ 称为转折点。假设 $q(\xi)$ 是有界的，则具有无限大频率的波没有转折点。走时 ξ 实际与频率无限的波有关。

现在让我们研究图 12.16 中描述的散射问题。假定非均匀介质的两侧为均匀介质，由于在均匀介质中 $q=0$，因而在那里 ϕ 将为 $e^{\pm i\omega\xi}$ 形式。在图 12.16 中的上图，把信号 $e^{i\omega\xi}$ 从左边传送到非均匀介质，并观测到反射波 $S_{12}(\omega)e^{-i\omega\xi}$ 和透射波 $S_{11}(\omega)e^{i\omega\xi}$。在图 12.16 中的下图，从右边传送信号 $e^{-i\omega\xi}$，并观测到反射波 $S_{21}(\omega)e^{i\omega\xi}$ 和透射波 $S_{22}e^{-i\omega\xi}$。根据能量互换和守恒，可得

$$
\begin{aligned}
&S_{11}=S_{22},\\
&|S_{11}|^2+|S_{12}|^2=1, \qquad\qquad (12.55)\\
&|S_{22}|^2+|S_{21}|^2=1,
\end{aligned}
$$

如下所述，上述四个系数组成的散射矩阵是酉矩阵。

我们的问题是根据在非均匀介质外观测到的反射波和透射波来求位势 $q(\xi)$。若没有（12.37）中的阻抗 η^2 必须为正的限制，则该问题就完全未定。一般说，微分算子$[d^2/d\xi^2-q(\xi)]$有“离散谱”，或“边界状态”；即对一定的 ω^2 值，在非均匀区的内界面，式（12.38）的解为零。然而正如 Sabatier（1976）指出的那样，这样的解在我们的问题中不能存在，因为阻抗为正实数。这种情况下，我们问题的解由 Gel'fand-Levitan 积分方程单值地确定。我们将按照 Faddeev（1967)的方法，采用 Ware 和 Aki（1969）对相应的离散问题的模拟推导，得出积分。Fadeev 证明，对于一般的散射理论，矩阵 $\boldsymbol{S}(\omega)$ 必定是酉矩阵，这样，除了（12.55）以外，还有 $S_{11}S^*_{21}+S_{12}S^*_{22}=0$。$\boldsymbol{S}$ 的酉矩阵的性质使得只要根据 S_{12} 或 S_{21}，就能决定整个矩阵。实际

上这一附加的性质来自于透射波 S_{11} 的因果关系。如下面要表明的，因为这个因果关系，位势 $q(x)$ 只由反射地震图 S_{12} 或 S_{21} 中的一个的特性来确定。由于 $q(x)$ 决定整个矩阵，则可看到，$\mathbf{S}$ 由 S_{12} 或 S_{21} 来确定。

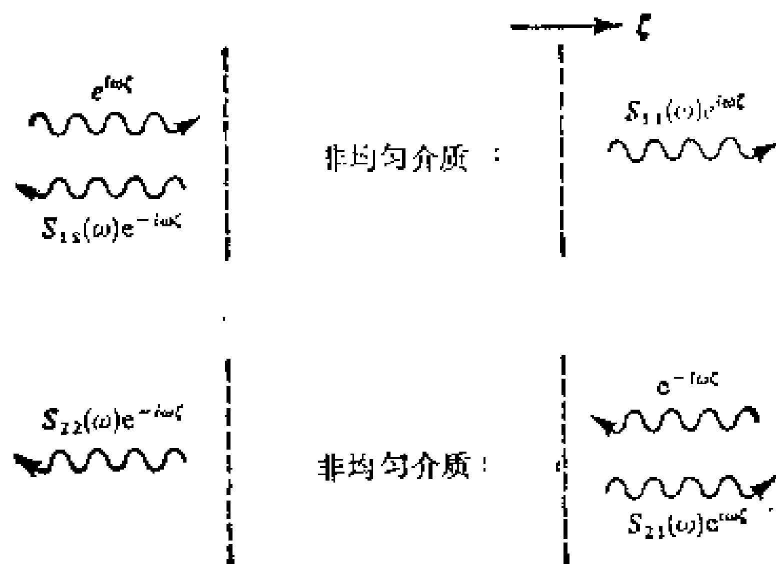


图 12.16
求 S 矩阵的散射试验

让我们引入边界条件分别为

$$\lim_{\zeta\to\infty} f_1(\zeta,\omega)=e^{i\omega\zeta} \tag{12.56}$$

和

$$\lim_{\zeta\to-\infty} f_2(\zeta,\omega)=e^{-i\omega\zeta}$$

时 (12.38) 的基本解 $f_1(\zeta,\ \omega)$ 和 $f_2(\zeta,\ \omega)$。

散射问题的解——例如图 12.16 中的上图表示的——可以用基本解来表达，或为 $S_{11}(\omega)f_1(\zeta,\ \omega)$，或为 $f_2(\zeta,\ -\omega)+S_{12}(\omega)f_2(\zeta,\ \omega)$。于是有

$$S_{11}(\omega)f_1(\zeta,\omega)=f_2(\zeta,-\omega)+S_{12}(\omega)f_2(\zeta,\omega). \tag{12.57}$$

应用在

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\zeta|)|q(\zeta)|d\zeta<\infty$$

条件下 f_1 和 f_2 的解析的性质和透射波 $S_{11}(\omega)$ 的因果关系，上式导致关于 $A(x,\zeta)$ 的 Gel'fand Levitan 积分方程

$$A(x,\zeta)=-R(\zeta+x)-\int_{-\zeta}^{x}A(x,\tau)R(\zeta-\tau)d\tau \qquad \zeta<x, \qquad (12.58)$$

据上式，由

$$q(\zeta)=2\frac{dA(\zeta,\zeta)}{d\zeta} \qquad (12.59)$$

求得位势 $q(\zeta)$。式中 $R(t)$是时间域中的反射记录，

$$R(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{12}(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega. \qquad (12.60)$$

若按照离散问题的类似步骤，上述推导的关键就很容易被理解。为使这种比较能完整些，把场变量位移变为$\sqrt{阻抗}\times$位移。重新确定该新变量的反射和透射系数 r，t，代替（12.33），得

$$t_i=\bar{t}_i,$$
$$t_i^2+r_i^2=1,$$
$$\bar{t}_i^2+\bar{r}_i^2=1, \qquad (12.61)$$
$$r_i=-\bar{r}_i=\frac{c_i\rho_i-c_{i+1}\rho_{i+1}}{c_i\rho_i+c_{i+1}\rho_{i+1}}(\text{无变化}),$$

这与 S 矩阵的关系式（12.55）类似。

如图 12.15 所示，以同样方法确定新变量的上行波 U_i 和下行波 D_i，用新确定的 r_i 和 t_i，可得同样的传播矩阵（12.45）。

当边界条件为

$$\begin{pmatrix}U\\D\end{pmatrix}_{n+1}=\begin{pmatrix}0\\w^{n+1}\end{pmatrix}, \qquad (12.62)$$

式中 $w=\exp(i\omega\Delta t)$。求解（12.45）式中的 U_0 和 D_0，可得基本解 $f_1(\zeta,\omega)$的离散模拟形式。然后根据传播矩阵，用 U_0，D_0 计算 U_k，D_k。结果是

$$f_1(k,z)=U_k+D_k$$

$$=\frac{1}{w^k}\{z^{n+1}G_n(1/z)[F_{k-1}(z)-G_{k-1}(z)]$$
$$+z^kF_n(z)[F_{k-1}(1/z)-G_{k-1}(1/z)]\}.$$
(12.63)

同样，根据边界条件

$$\binom{U}{D}_{n+1}=\binom{w^{n+1}}{0}, \quad (12.64)$$

$$\hat{f}_1(k,z)=\frac{1}{w^k}\{z^{n+1}F_n(1/z)[F_{k-1}(z)-G_{k-1}(z)]$$
$$+z^kG_n(z)[F_{k-1}(1/z)-G_{k-1}(1/z)]\}.$$
(12.65)

可得相应于 $f_1(\xi, -\omega)$ 的反向的基本解 $\hat{f}_1$。

与此类似，根据边界条件

$$\binom{U}{D}_0=\binom{w^{n+1}}{0}, \quad (12.66)$$

可得基本解 $f_2(\xi, \omega)$的离散模拟形式，根据

$$\binom{U}{D}_0=\binom{0}{w^{n+1}}, \quad (12.67)$$

可得 $f_2(\xi, -\omega)$的离散模拟形式。结果是

$$f_2(k,z)=w^{n-k+1}[F_{k-1}(z)-G_{k-1}(z)],$$
$$\hat{f}_2(k,z)=w^{n+k+1}[F_{k-1}(1/z)-G_{k-1}(1/z)]. \quad (12.68)$$

f_1 和 f_2 与其反向函数的关系如下：

$$f_i(k,z)=z^{n+1}\hat{f}_i(k,1/z). \quad (12.69)$$

现在让我们来描述用

$$\binom{U}{D}_0=\binom{R(z)}{1} \quad (12.70)$$

和

$$\begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ T(z) \end{pmatrix} \tag{12.71}$$

所定义的反射地震图 $R(z)$和透射地震图 $T(z)$的散射试验的直接模拟问题。(12.57) 的离散模拟形式现可写为

$$\frac{T(z)}{w^{n+1}}f_1(k,z)=\frac{\hat{f}_2(k,z)}{w^{n+1}}-\frac{R(z)}{w^{n+1}}f_2(k,z). \tag{12.72}$$

前节中，我们利用这样的事实：在导出反演公式（12.54）时，时移的透射地震图 $T(z)/w^n$ 没有 z 的负幂次项。这时在我们的散射问题中入射波在时刻 $2k\Delta t$ 前还未到这分界面 k 处。因此，(12.72)的形式应是：

$$b_k w^k(1+c_1z+c_2z^2+\cdots), \tag{12.73}$$

式中 $b_k=t_0t_1\cdots t_{k-1}$。现在引入函数 $K_2(k,z)$，以便改写(12.72)的左边为

$$\frac{\hat{f}_2(k,z)}{w^{n+1}}=b_k[w^k+K_2(k,z)]$$

和

$$\frac{f_2(k,z)}{w^{n+1}}=b_k[w^{-k}+K_2(k,1/z)]. \tag{12.74}$$

将 (12.74) 代入 (12.72) 并令其等于 (12.73)，则对 w 的所有负幂次项和直至包括 w^k 的所有正幂次项，有

$$K_2(k,z)+\frac{R(z)}{w^k}+R(z)K_2(k,1/z)=0. \tag{12.75}$$

如 (12.68) 所示，因为 $\hat{f}_2$ (k,z) 已清楚地知道，所以可用 F_k (z) 和 G_k (z) 写出

$$K_2(k,z)=\frac{\hat{f}_2(k,z)}{w^{n+1}b_k}-w^k$$

并表明 K_2 (k,z) 是下列形式的一个多项式：

$$K_2(k,z)=K(k,2-k)w^{2-k}+K(k,4-k)w^{4-k}+\cdots$$
$$+K(k,k)w^k \qquad k>2,$$

式中

$$K(k,k)=\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-2}(1-r_i)^2(1+r_{k-1})}-1,$$

即

$$r_{k-1}=\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-2}(1-r_i)^2[1+K(k,k)]}-1. \qquad (12.76)$$

采用$K\ (k,k')$,式(12.75)可改写为

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & & & R_0 \\ & 0 & R_0 & R_1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ & R_0 & & \\ R_0 & R_1 & \cdots & R_{k-1} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} K(k,2-k) \\ K(k,4-k) \\ \vdots \\ K(k,k) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -R_0 \\ -R_1 \\ \vdots \\ -R_{k-1} \end{pmatrix}. \qquad (12.77)$$

这是Gel'fand-Levitan积分方程(12.58)的离散模拟形式,$A(x,\ \zeta)$相应于$K(k,\ k')$;式(12.59)可以由$A(\zeta,\ \zeta)$求得位势$q(\zeta)$,它和根据$K(k,\ k)$给出的反射系数公式(12.76)相对应。用(12.77)进行的反演与用(12.54)进行的反演都以同一反射地震图R_k为根据,只是前者分(12.77)和(12.76)两步进行,而后者则一步完成。前者比较一般,因为R_0可不同于1。Koehler和Taner(1977)将(12.54)应用于由随机噪声和已知层状介质的反射地震图组成的合成资料,并证明在信噪比为1至5时,反射系数计算仍是稳定的。

至此，只解决了一维反射地震图的反演问题。推广到二维或三维问题是极其困难的，虽然勘探地震学急需这样的解，但仍未完成。然而Claerbout (1976) 已做出巨大的努力以获取该问题的解。他先从只包括速度干扰（13.3节）的声波方程开始，而不考虑P波到S波或S波到P波的转换。采用抛物线的近似(13.6节)，计算已知震源的下行波，根据地表观测到的记录，重新构成上行反射波。他的主要想法是反射面出现在沿上行和下行波相位一致的地表面。他还用13.2节中描述的干扰法的简化形式，把反射系数的空间导数表达为上行波源，并用有限差分计算来解正演和反演问题。他已能在这些想法的基础上研制出在商业上有竞争能力的处理方案。

12.3 线性化系统的反演问题

至此，我们已讨论了地震学中的两个基本数据组——即在一维地球模型范围中的走时和反射地震图。另外两个重要数据组是：(i) 面波的相速度和群速度，(ii) 自由振荡周期。人们曾作过多次尝试以求得这些数据的反演公式。

例如，高桥 (Takahashi, 1955) 能把Love波相速度的表达式简化为Abel积分方程的形式，并且从作为周期T的函数的相速度$c(T)$，得出剪切波速度为β的深度$z(\beta)$的公式：

$$z(\beta)\sim 0.87\frac{1}{\pi^2}\int_0^{T_\beta}\frac{dT}{\sqrt{(c(T))^{-2}-\beta^{-2}}},\qquad (12.78)$$

式中T_β是相速度为β的周期。但在推导上述公式时，他不得不采用WKBJ近似（只对一个波长内介质特性的平滑变化有效），并假定对一给定的周期只有一个转折点，在那里剪切波速等于相速度。这些假设的限制性太强，以至于该公式在大多数情况下是不实际的。

若直接（或正演）问题的解已知，并且对模型参数可能有一合理的最初估计，则存在一种广义的反演方法。这种方法可用于受限制较少的有关地球模型的任何数据。我们给最初估计的模型参数以一扰动，并计算相应观察量的变化。只要扰动较小，可以预计观察量和参数扰动之间的变化是线性的，然后把反演问题简化为一组线性方程。在面波的情况下，采用变分原理，不同深度的弹性常数和密度扰动所产生的相速度的变化在7.3节中已讨论过了。例如，(7.71) 和 (7.78) 分别给出了Love波和Rayleigh波的相速度的线性化公式。环型自由振荡周期的公式已在(8.64)和 (8.65) 中给出。这些公式一般可以写成：

$$d_i=\int_0^{r_\oplus} G_i(r)m(r)dr \qquad (i=1,2,\cdots,N), \quad (12.79)$$

式中 d_i 代表观测值减去根据初始模型计算值所得的数据；$m(r)$ 代表模型参数，它等于所期望的地球模型的某一个量（如速度或密度）和初始模型所对应的差。这样，$m(r)$描述了模型参数扰动量，它是离地心距离 r 的函数。这里 $r_\oplus$ 是地球半径。核函数 $G_i(r)$是由初始模型计算得到的。

问题是要根据一组有限的观测数据 d_i $(i=1,\cdots,N)$来确定$m(r)$，其中每个数据是一已知标量。式 (12.79) 的形式解是

$$m(r)=m_p(r)+m_\perp(r), \quad (12.80)$$

其中 $m_p(r)$是 (12.79) 的特解，$m_\perp(r)$是下式的任一解：

$$0=\int_0^{r_\oplus} G_i(r)m_\perp(r)dr \qquad (i=1,2,\cdots,N). \quad (12.81)$$

Backus和Gilbert (1967) 证明，对任一有限地震数据组都有 $m_\perp(r)$。若 $m_\perp(r)$是 (12.81) 的解，用任一数相乘后的 $m_\perp(r)$ 也是它的一个解。也就是说，形式解可取从$-\infty$到$+\infty$的任意值。认识到此解固有的非唯一性，Backus和Gilbert (1967, 1968, 1970) 探寻了根据一给定的有限数据组对地球内部进行推断的最

佳方法。他们介绍了特解的空间分辨率和该分辨率与数据中噪声产生的误差之间的权衡关系这两个有用的概念。下面将详细阐述这些概念，先从离散模型这种较为简单的情况说起。讨论连续模型$m(r)$时要求利用 Hilbert 空间，所以我们将讨论由有限量的参数 $m_j(j=1,2,\cdots,M)$ 组成的离散模型。积分方程（12.79）可以简化为线性方程

$$d_i=\sum_{j=1}^{M}G_{ij}m_j \qquad (i=1,2,\cdots,N), \tag{12.82}$$

将此式写为

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{Gm}. \tag{12.83}$$

我们的反演问题可分为两部分。第一部分求得（12.83）的特解 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_p$:

$$\boldsymbol{m}_p=\boldsymbol{G}_p^{-1}\boldsymbol{d}. \tag{12.84}$$

用 $\boldsymbol{G}_p^{-1}$ 处理数据并给出特解。第二部分是求出特解的分辨率和误差。

由于 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{Gm}$，从(12.84)得

$$\boldsymbol{m}_p=\boldsymbol{G}_p^{-1}\boldsymbol{Gm}, \tag{12.85}$$

该式表示由真实解加权平均后得到的特解，其权重由矩阵 $\boldsymbol{G}_p^{-1}\boldsymbol{G}$ 的行矢量给出。该权重矩阵称为分辨矩阵。若 $\boldsymbol{G}_p^{-1}\boldsymbol{G}$ 是单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，则分辨率很高，特解等于真实解。若 $\boldsymbol{G}_p^{-1}\boldsymbol{G}$ 的行矢量分量分布在对角的周围（别处的值低），则特解表示在该分布上的平滑解。

数据误差 $\Delta\boldsymbol{d}$ 产生的特解估计误差 $\Delta\boldsymbol{m}_p$ 可用协方差矩阵 $\langle\Delta\boldsymbol{m}_p\Delta\tilde{\boldsymbol{m}}_p\rangle$ 来描述，其中～表示共轭转置，$\langle\ \ \rangle$ 表示平均。据(12.84)，求得

$$\begin{aligned}\langle\Delta\boldsymbol{m}_p\Delta\tilde{\boldsymbol{m}}_p\rangle&=\langle\boldsymbol{G}_p^{-1}\Delta\boldsymbol{d}\Delta\tilde{\boldsymbol{d}}\tilde{\boldsymbol{G}}_p^{-1}\rangle\\&=\boldsymbol{G}_p^{-1}\langle\Delta\boldsymbol{d}\Delta\tilde{\boldsymbol{d}}\rangle\tilde{\boldsymbol{G}}_p^{-1}.\end{aligned} \tag{12.86}$$

上式用数据误差的协方差矩阵给出 $\Delta\boldsymbol{m}_p$ 的协方差矩阵。

这样，只要特解的算子 G_p^{-1} 已知，就很容易得到解的分辨率和误差。

以下推导称为广义反演的特解。

12.3.1 模型空间和数据空间

以解下列联立方程问题为例：

$$
\begin{aligned}
m_1 + m_2 &= 1, \\
m_3 &= 2, \\
-m_3 &= 1.
\end{aligned}
\tag{12.87}
$$

这里有三个方程，三个未知数，但 m_1 和 m_2 的解太多，而 m_3 却无解。

我们打算通过处理（12.87）提出的问题，详细地描述线性反演理论。这要求我们深入研究矩阵方法，以便分析地球物理学中的反演问题。我们将根据 Lanczos（1961）的工作来描述上述问题的自然解。

一般地说，我们的问题以方程

$$
\boldsymbol{Gm} = \boldsymbol{d} \tag{12.88}
$$

来表达，式中 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_M)^T$ 是具有 M 个分量的模型空间中的矢量，$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_N)^T$ 是具有 N 个分量的数据空间中的矢量，$\boldsymbol{G}$ 是 $N\times M$ 矩阵，

$$
\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1M} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NM} \end{pmatrix}.
$$

按照 Lanczos 的办法，建立一个 Hermiten 矩阵 $\boldsymbol{S}$，它是由 $\boldsymbol{G}$，它的复共轭，转置矩阵 $\tilde{\boldsymbol{G}} \equiv (G^*)^T$ 和零组成的：

$$
\boldsymbol{S} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \boldsymbol{G} \\ \hline \tilde{\boldsymbol{G}} & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \}N \\ \}M \end{array}
.
$$
$$
\quad\;\underbrace{}_{N}\;\underbrace{}_{M}
$$

S 是 $(N+M)\times(N+M)$ 方阵，且 $\tilde{S}=S$。这肯定了存在一组正交的本征矢量 $w_i(i=1,2,\cdots,N+M)$，其本征值 λ_i 为实数，满足

$$Sw_i=\lambda_i w_i \qquad (i=1,2,\cdots,N+M). \qquad (12.89)$$

对特定 λ 为保证有非零 w_i，行列式 $S-\lambda I$ 必须为零，因此本征矢量由

$$\det(S-\lambda I)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_{N+M}-\lambda)=0 \qquad (12.90)$$

确定。本征矢量 w_i 有 $N+M$ 个分量。把这些分量分成 u_i 和 v_i 两部分（在 N 维数据空间中的 u_i 和在 M 维模型空间中的 v_i），并将式（12.89）改写成：

$$\begin{pmatrix} 0 & G \\ \tilde{G} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix} v_i \\ u_i \end{pmatrix}\begin{matrix} \}N \\ \}M \end{matrix}. \qquad (12.91)$$

若 λ_i 是非零本征值，则可得到下列本征矢量对 (u_i, v_i) 的耦合方程：

$$\begin{aligned} Gv_i &= \lambda_i u_i, \\ \tilde{G}u_i &= \lambda_i v_i. \end{aligned} \qquad (12.92)$$

若改变 λ_i 的符号，则 $(-u_i, v_i)$ 也是能满足上式的本征矢量对。假设有 p 对非零本征值 $\pm\lambda_i$，相应的本征矢量对为

对 λ_i $(i=1, 2, \cdots p)$ 是 (u_i, v_i)，

对 $-\lambda_i$ $(i=1, 2, \cdots p)$ 是 $(-u_i, v_i)$。

对零本征值，式（12.92）解耦，u_i 和 v_i 变得独立：

$$\begin{aligned} Gv_i &= 0 \qquad (i=p+1, \cdots, M), \\ \tilde{G}u_i &= 0 \qquad (i=p+1, \cdots, N). \end{aligned} \qquad (12.93)$$

于是，在 $Sw=\lambda w$ 的 $N+M$ 个本征矢量中，$2p$ 个为非零，其余 $N+M-2p$ 个为零。由 u_i $(i=1, 2, \cdots, N)$ 跨及的数据空间和由 v_i $(i=1, 2, \cdots, M)$ 跨及的模型空间只通过非零本征值 $\pm\lambda_i(i=1, 2, \cdots, p)$ 耦合。据（12.92），求得

$$\tilde{G}Gv_i = \lambda_i^2 v_i,$$
$$G\tilde{G}u_i = \lambda_i^2 u_i. \tag{12.94}$$

由于 $\tilde{G}G$ 和 $G\tilde{G}$ 都是 Hermite 矩阵，每个 v_i 和 u_i 组成一具有实本征值的正交本征矢量组，归一化后，可写成

$$\tilde{v}_i v_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1,\ 2,\ \cdots,\ M),$$
$$\tilde{u}_i u_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N). \tag{12.95}$$

我们将定义一矩阵，其列矢量为具有分量 $(v_{1i},\ v_{2i},\ \cdots,\ v_{Mi})^T$ 的本征矢量 v_i：

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & \multirow{3}{*}{v_i} & \cdots & v_{1M} \\ \vdots & & & & \vdots \\ v_{M1} & \cdots & & \cdots & v_{MM} \end{pmatrix}.$$

同样，

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & \multirow{3}{*}{u_i} & \cdots & u_{1N} \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_{N1} & \cdots & & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}.$$

接着，式（12.95）可写成

$$\tilde{U}U = U\tilde{U} = I,$$
$$\tilde{V}V = V\tilde{V} = I. \tag{12.96}$$

U 的列跨及整个数据空间。把 U 分成 U_p 和 U_0，其中 U_p 由具有非零本征值的本征矢量组成，U_0 则由具有零本征值的本征矢量组成。同样，把 V 分成 V_p 和 V_0：

$$U_p = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{N1} & \cdots & u_{Np} \end{pmatrix},$$

$$V_p = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{M1} & \cdots & v_{Mp} \end{pmatrix}.$$

由于正交性，则有 $\tilde{U}_pU_p=\tilde{V}_pV_p=I$. 但 U_p 和 V_p 不再是完备的，$U_p\tilde{U}_p\neq I$，$V_p\tilde{V}_p\neq I$. U_p 和 V_p 是通过非零本征值 λ_1，$\cdots$，λ_p 来耦合的。引入其元素为非零本征值 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_p 的对角矩阵，可将（12.92）和（12.93）改写成

$$\begin{aligned} GV_p &= U_p\Lambda_p, \\ \tilde{G}U_p &= V_p\Lambda_p, \end{aligned} \tag{12.97}$$

$$\begin{aligned} GV_0 &= 0, \\ \tilde{G}U_0 &= 0. \end{aligned} \tag{12.98}$$

因此，可写成

$$GV=G(V_p,\ V_0)=(U_p,\ U_0)\begin{pmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

式中（V_p，V_0）表示 V，它分解成两个矩阵，对（U_p，U_0）也一样。由于 $V\tilde{V}=I$，我们有

$$\begin{aligned} G&=(U_p,\ U_0)\begin{pmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{V}_p \\ \tilde{V}_0 \end{pmatrix} \\ &=U_p\Lambda_p\tilde{V}_p. \end{aligned} \tag{12.99}$$

这是 G 的重要因子分解，它表示了（12.97）和（12.98）中的所有结果。它表明，G 可单由 U_p 和 V_p 空间组成。正如 Lanczos 的说法，U_0 和 V_0 空间是没被算子 G 照亮的盲点。

现在让我们来研究一下本节开头给出的例子的 U_p，V_p，U_0 和 V_0 空间。从（12.87）求得

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{G}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G\tilde{G}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

先解 U 空间中的本征值问题：

$$G\tilde{G}u_i=\lambda_i^2u_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

本征值由下式确定：

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda^2 \end{vmatrix} = (2-\lambda^2)(\lambda^2-2)\lambda^2 = 0.$$

对应 $\lambda_1^2=\lambda_2^2=2$ 的本征矢量 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 由求解

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

并将长度归一化成 $u_{11}^2+u_{21}^2+u_{31}^2=1$ 来求得。我们得到

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

第三个本征值 λ_3^2 为零，相应的本征矢量 $\boldsymbol{u}_3$ 由求解

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = 0$$

和将长度归一化来确定。我们求得

$$\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

因而，$\boldsymbol{U}_p$ 和 $\boldsymbol{U}_0$ 空间是

$$\boldsymbol{U}_p=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{U}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

我们的模型 $\boldsymbol{m}$ 不能产生由 $\boldsymbol{U}_0$ 表示的数据（见(12.87)）。

相应的 $\boldsymbol{V}_p$ 空间能由(12.92)或(12.97)容易地得到：

$$\boldsymbol{V}_i=\frac{1}{\lambda_i}\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{u}_i,$$

请注意，由于该 λ_i 不是零，以 λ_i 去除是可以的。求得

$$\boldsymbol{V}_p=(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)=\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

为求 $\boldsymbol{V}_0$ 空间，必须解方程

$$\tilde{G}G\boldsymbol{V}_3=\boldsymbol{0},$$

它给出

$$\boldsymbol{V}_0=\boldsymbol{V}_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{V}_0$ 表达的模型 $\boldsymbol{m}$ 不能影响任何可观察的量(见(12.87))。

最后可证明 Lanczos 分解(12.99)的有效性，

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{\Lambda}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & 0\\ -1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

此式表明 $\boldsymbol{G}$ 可只用 $\boldsymbol{U}_p$ 和 $\boldsymbol{V}_p$ 空间来建立。表达式 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U}_p\boldsymbol{\Lambda}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p$ 清楚地描述了由式 $\boldsymbol{Gm}=\boldsymbol{d}$ 耦合的数据空间 $\boldsymbol{U}$ 和模型空间 $\boldsymbol{V}$。

由于 $\tilde{\boldsymbol{U}}_0\boldsymbol{Gm}=0$，则根据任一模型 $\boldsymbol{m}$ 预测的可观察量 $\boldsymbol{Gm}$ 在 $\boldsymbol{U}_0$ 空间中没有分量，因而被限制在 $\boldsymbol{U}_p$ 空间内。因为 $\boldsymbol{U}_p$ 空间在那种情况下是完备的，若没有 $\boldsymbol{U}_0$ 空间，便总可以求得满足式 $\boldsymbol{Gm}=\boldsymbol{d}$ 的模型，然而，若存在 $\boldsymbol{U}_0$ 空间，且数据在 $\boldsymbol{U}_0$ 空间中有分量，则预测 $\boldsymbol{Gm}$ 不能描述任意选择的 $\boldsymbol{m}$，这是因为 $\boldsymbol{Gm}$ 在 $\boldsymbol{U}_0$ 中没有分量。于是，$\boldsymbol{U}_0$ 空间是观测数据和算子 $\boldsymbol{G}$ 所作出的预测之间不一致的来源。

此外，$\boldsymbol{V}_0$ 空间是根据数据确定模型的非唯一性的来源。因

为 $GV_0=0$，在与观测不矛盾的情况下，我们可把 V_0 空间中的任意矢量加到模型上。

12.3.2. 广义逆

若 $G=U\Lambda\tilde{V}$ 的精确逆存在，则可写成 $G^{-1}=V\Lambda^{-1}\tilde{U}$ 因此，很自然把下式认为是对算子 $G=U_p\Lambda_p\tilde{V}_p$ 的逆算子：

$$G_g^{-1}=V_p\Lambda_p^{-1}\tilde{U}_p. \tag{12.100}$$

我们称它广义逆算子。现在看一下它是如何起作用的。

首先讨论没有 U_0，V_0 空间的情况。在这种情况下，$U_p\tilde{U}_p=I$，$V_p\tilde{V}_p=I$，因此 $G_g^{-1}=V_p\Lambda_g^{-1}\tilde{U}_p=(U_p\Lambda_p\tilde{V}_p)^{-1}=G^{-1}$。广义逆与没有 U_0，V_0 空间的精确逆一致。

其次讨论没有 V_0、但有 U_0 空间的情况。在这种情况下，$\tilde{G}G=(V_p\Lambda_p^2\tilde{V}_p)$ 有精确的逆 $(\tilde{G}G)^{-1}=V_p\Lambda_p^{-2}\tilde{V}_p$，且可运用最小二乘方法(见补充 12.3)。用我们的符号，所谓正规方程可写成

$$\tilde{G}Gm=\tilde{G}d,$$

解 $\hat{m}$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\hat{m}&=(\tilde{G}G)^{-1}\tilde{G}d\\&=V_p\Lambda_p^{-2}\tilde{V}_p\cdot V_p\Lambda_p\tilde{U}_pd\\&=V_p\Lambda_p^{-1}\tilde{U}_pd=G_g^{-1}d.\end{aligned} \tag{12.101}$$

因而，在有 U_0 空间而没有 V_0 时，广义逆就是最小二乘方解。

用几何方法很容易证明：为什么广义逆能给出残差的平方和 $|d-Gm|^2$ 取极小的最小二乘方解。

令 $m_g=G_g^{-1}d$，有

$$\begin{aligned}d-Gm_g&=d-U_p\Lambda_p\tilde{V}_pV_p\Lambda_p^{-1}\tilde{U}_pd\\&=d-U_p\tilde{U}_pd.\end{aligned}$$

由于 $\tilde{U}_pU_p=I$，求得

$$\begin{aligned}\tilde{U}_p(d-Gm_g)&=\tilde{U}_pd-\tilde{U}_pU_p\tilde{U}_pd\\&=0.\end{aligned}$$

广义逆的残差 $d-Gm_g$ 在 U_p 空间中没有分量。此外，由于 $\tilde{U}_0\times Gm_g=0$，Gm_g 在 U_0 空间没有分量。于是，如图 12.17 所示，

矢量 Gm_g 垂直于残差矢量 $d-Gm_g$。如前所述，对任何 m，矢量 Gm 被限制在 U_p 空间。当 $d-Gm$ 垂直于 Gm 时，数据矢量 d 和 Gm 之间的距离 $|d-Gm|^2$ 很明显地已减到极小。

第三，讨论没有 U_0，但有 V_0 空间的情况。这种情况下，可立即证明，广义逆 m_g 满足式 $Gm_g=d$。由于 $U_p\tilde{U}_p=I$，

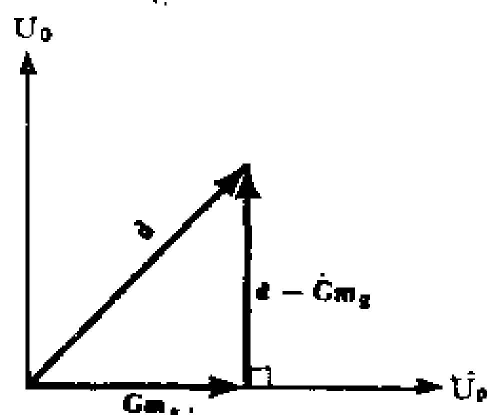


图 12.17
残差 $d-Gm_g$ 垂直于 Gm_g

$$
\begin{aligned}
Gm_g &= GG_g^{-1}d \\
&= U_p\Lambda_p\tilde{V}_pV_p\Lambda_p^{-1}\tilde{U}_pd \\
&= d.
\end{aligned}
$$

广义逆给出的模型满足式 $Gm=d$ 并被限制于 V_p 空间，$Gm=d$ 的解一般可表达为

$$m=m_g+\sum_{i=p+1}^{M}a_iv_i,$$

式中 V_i 是 V_0 空间的本征矢量。由于 $\tilde{v}_iv_j=\delta_{ij}$，可得

$$|m|^2=|m_g|^2+\sum a_i^2\geq|m_g|^2.$$

广义逆提供了所有可能的解的最小值。

在 V_p 空间里受限制的任意模型矢量，能用算子 $\tilde{G}=V_p\Lambda_p\times\tilde{U}_p$ 从一数据矢量，比如说 f 产生。将模型矢量 $\tilde{G}f$ 代入式 $Gm=d$，求得 $f=(G\tilde{G})^{-1}d$。模型 $m=\tilde{G}(G\tilde{G})^{-1}d$ 满足 $Gm=d$，并被限制在 V_p 空间内，因此算子 $\tilde{G}(G\tilde{G})^{-1}$ 应与 G_g^{-1} 相等：

$$G_g^{-1}=\tilde{G}(G\tilde{G})^{-1}. \tag{12.102}$$

这样，在没有 U_0 空间时，便如在没有 V_0 空间时最小二乘方解(12.101)的情况下一样，可以不经过本征矢量分析而直接根据 G 计算广义逆。

最后，在既有 V_0 又有 U_0 空间时，广义逆 $G_g^{-1}=V_p\Lambda_p^{-1}\tilde{U}_p$ 会使数据空间中的 $|d-Gm|^2$ 和模型空间中 $|m|^2$ 的变为极小，这是实例(12.87)的情况。求得

$$G_g^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix},$$

它提供了广义逆解

$$m_g=G_g^{-1}d=\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}.$$

12.3.3. 广义逆解的分辨率和误差

假如对前节中给出的广义逆问题解的唯一性和可靠性不加说明，那么这样的解自然仍是毫无意义的。

先求广义逆 m_g 和真实地球模型 m 间的关系式。因为 $m_g=G_g^{-1}d$ 和 $d=Gm$，求得

$$m_g=G_g^{-1}Gm. \tag{12.103}$$

当数据矢量 d 在 U_0 空间中有一分量时，式 $d=Gm$ 不成立。甚至在那种情况下，上述 m_g 和 m 间的关系式还是有效的，这是因为$\tilde{U}_pU_0=0$，且算子 $G_g^{-1}=V_p\Lambda_p^{-1}\tilde{U}_p$ 总会使 U_0 空间零化（即用算子 G_g^{-1} 消去 U_0 的任一分量）。

利用式(12.99)和(12.100)，上述关系式变成

$$\begin{aligned}m_g&=V_p\Lambda_p^{-1}\tilde{U}_pU_p\Lambda_p\tilde{V}_pm\\ &=V_p\tilde{V}_pm.\end{aligned} \tag{12.104}$$

若没有 V_0 空间，则 $V_p\tilde{V}_p=I$ 且 $m_g=m$。于是，在 $V_0=0$ 时，不管 U_0 空间存在与否，解都是唯一的。当 V_0 空间确实存在时，(12.104)表明 $V_p\tilde{V}_p$ 的行矢量构成加权系数，m_g 为 m 的加权平均。这类似于第十一章中所讨论的用真实谱加权平均表示聚束波数谱。矩阵 $V_p\tilde{V}_p$是分辨矩阵。在 12.3.6 节中将看到$V_p\tilde{V}_p$ 的

行矢量在最小二乘方意义上最接近 δ 函数（对角元素为1，其余为零）。

$\boldsymbol{V}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p$ 的对角元素是分辨率的有用的量度。对角元素的和（$\boldsymbol{V}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p$ 的迹）等于 p，即构成 $\boldsymbol{V}_p$ 本征矢量 $\boldsymbol{v}_i$ 的数目。原因是 $\boldsymbol{v}_i(i=1,2,\cdots,p)$ 是具有单位本征值的 $\boldsymbol{V}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p$ 的本征矢量，并且迹等于本征值之和。

假设模型矢量 $\boldsymbol{m}$ 的分量 $m_i(i=1,2,\cdots,M)$ 以某种在物理上有关的方式排列，如同在深度 h_i 处的密度情况那样，深度 h_i 随 i 单调地增加。若 $\boldsymbol{V}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p=\boldsymbol{I}$，则 M 个深度处所有的 m_i 值被单值地确定。若 $\boldsymbol{V}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p\neq\boldsymbol{I}$，$m_i$ 的估计值表示为 h_i 附近真实值的加权平均。在 $p=1$ 的极端情况下，M 个对角元素的总和为1，每个对角元素的平均值约为 $1/M$。这样，$\boldsymbol{V}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p$ 每个行矢量的 M 个分量约有大致相同的振幅 $1/M$，在所有深度上的估算值将无法区分。事实上，$p=1$ 时，对整个深度范围，仅可得到有一个独立参数的估算值。由于 $\tilde{\boldsymbol{V}}_0\boldsymbol{m}_g=0$，因此有 $M-p$ 个约束作用于 $\boldsymbol{m}_g$ 的 M 个分量上，结果 $\boldsymbol{m}_g$ 只有 p 个分量是独立的。

Wiggins(1972)把 $\boldsymbol{V}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p$ 的对角元素的分布当作模型空间中分辨率的粗略度量，描绘了这些结果。他把整个深度范围分为 p 个部分，每部分对角元素之和为1。对每个这样的部分可规定一个独立的模型参数平均估算值。

(12.87)实例的分辨矩阵是

$$\boldsymbol{V}_p\tilde{\boldsymbol{V}}_p=\begin{pmatrix}0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

这表明数据只能确定 m_1 和 m_2 的一个平均值，但能单值地确定 m_3。

现在让我们把注意力转向数据空间的分辨率上。观测的数据矢量 $\boldsymbol{d}$ 和用广义逆所预测的 $\boldsymbol{d}_g$ 之间关系如下：

$$d_g = GG_g^{-1}d \tag{12.105}$$

$$= U_p\tilde{U}_p d. \tag{12.106}$$

这样在没有 U_0 时，$U_p\tilde{U}_p = I$，观测数据和预测数据完全一致。若有 U_0，则它们之间出现不一致，且预测数据可表示为观测数据的加权平均值，加权系数由 $U_p\tilde{U}_p$ 的行矢量给出。

由于 $U_0 d_g = 0$，有 $N-p$ 个约束关系存在于 d_g 的 N 个分量中，因而预测的数据矢量 d_g 只有 p 个分量是独立的。由于 $U_p\tilde{U}_p$ 的迹也是 p，$U_p\tilde{U}_p$ 的对角元素可用于将数据分成 p 个部分，其中每个部分有一个独立的预测值。给更多的预测值是毫无意义的，因为它们只能提供多余的信息。

上述例子中，

$$U_p\tilde{U}_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

这表明预测值符合 d_1 的观测值，但只能提供 d_2 和 d_3 的一个独立的平均值（这种情况下，相邻点的权重是负的，两个平均值关系是 $d_{g2} = -d_{g3}$。）

最后，我们用解的协方差矩阵来衡量解的可靠性。由数据误差 Δd 产生的解的误差 Δm_g 可写为

$$\Delta m_g = G_g^{-1}\Delta d.$$

因此，它们协方差矩阵的关系是

$$\langle \Delta m_g \Delta\tilde{m}_g\rangle = G_g^{-1}\langle \Delta d \Delta\tilde{d}\rangle \tilde{G}_g^{-1}.$$

假设数据矢量的所有分量从统计意义看都是独立的，并共有相同的方差 σ_d^2，则有

$$\langle \Delta m_g \Delta\tilde{m}_g\rangle = \sigma_d^2 G_g^{-1}\tilde{G}_g^{-1}. \tag{12.107}$$

若 $U_0 = V_0 = 0$，令 $G_g^{-1} = G^{-1}$，则得

$$\langle \Delta m_g \Delta \tilde{m}_g \rangle = \sigma_d^2 (\tilde{G}G)^{-1}. \tag{12.108}$$

当 $U_0 \neq 0$，$V_0 = 0$ 时，令 $G_g^{-1} = (\tilde{G}G)^{-1}\tilde{G}$ [见(12.101)]，则得

$$\begin{aligned}\langle \Delta m_g \Delta \tilde{m}_g \rangle &= \sigma_d^2 (\tilde{G}G)^{-1}\tilde{G}G(\tilde{G}G)^{-1} \\ &= \sigma_d^2 (\tilde{G}G)^{-1}\end{aligned} \tag{12.109}$$

这是在普通最小二乘方法里所采用的求解的方差的熟悉公式。

当 $U_0 = 0$，$V_0 \neq 0$ 时，令 $G_g^{-1} = \tilde{G}(G\tilde{G})^{-1}$ [见 (12.102)]，则

$$\langle \Delta m_g \Delta \tilde{m}_g \rangle = \sigma_d^2 \tilde{G}(G\tilde{G})^{-1}(G\tilde{G})^{-1}G. \tag{12.110}$$

一般说来，设 $G_g^{-1} = V_p \Lambda_p^{-1} \tilde{U}_p$，则

$$\begin{aligned}\langle \Delta m_g \Delta \tilde{m}_g \rangle &= \sigma_d^2 V_p \Lambda_p^{-1} \tilde{U}_p U_p \Lambda_p^{-1} \tilde{V}_p \\ &= \sigma_d^2 V_p \Lambda_p^{-2} \tilde{V}_p,\end{aligned} \tag{12.111}$$

式中 Λ_p^{-2} 是元素为 $\lambda_i^{-2}(i=1, 2, \cdots, p)$ 的对角矩阵。

显然，当 λ_i 较小时，解的协方差较大。Wiggins (1972) 采用的原则是消去本征值较小的本征矢量，以便使 $\langle \Delta m_g \Delta \tilde{m}_g \rangle$ 保持在某一水平下。这样减少了非零本征矢量的个数 p，降低了模型和数据空间中的分辨率，但通过研究分辨率和数据误差产生的解的方差之间的权衡关系，即可选出合适的 p。

上例中，

$$\langle \Delta m_g \Delta \tilde{m}_g \rangle = \sigma_d^2 \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_d^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

这表明，m_{g1} 和 m_{g2} 的方差是 m_{g3} 方差的一半，m_{g1} 和 m_{g2} 是完全相关的，其相关系数为+1。这个相关性是由 $m_1 = m_2 = d_1/2$ 特解 $G_g^{-1}d$ 的形式所产生的。原始观测值 $m_1 + m_2 = 1$ 并不意味着 m_1 和 m_2 之间有这种特殊关系。地球物理文献中有某些实例，其

中估计的模型参数间的这种明显的相关性确实被认为是实际的物理关系。

12.3.4 最大似然逆

前一节中，在假设数据协方差有一特别简单形式的情况下计算了解的协方差。若数据协方差不是 $\sigma_d^2 I$，而是一般形式的 R_{dd}，不仅解的方差的计算变得复杂，而且还产生了有关统计学估算的基本问题。正如图 12.17 中所示，广义逆是由使 $|b - Gm|^2$ 达到极小而求得的。当 d_i 从统计学意义上说是独立的，且有相同的方差 σ_d^2，而不是 R_{dd} 更一般的形式时，该极小值给出最大似然估算。

正如 11.4.2 节中讨论"最大似然滤波器"时所证明的，具有协方差矩阵 R_{dd} 的多变量 Gauss 分布的概率密度函数写为：

$$f(d) = \frac{|R_{dd}|^{1/2}}{(2\pi)^{N/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\widetilde{d - Gm})R_{dd}^{-1}(d - Gm)\right]. \quad (12.112)$$

这表明，对于使似然函数达到极小所作的估算来说，必须使 $(\widetilde{d - Gm})R_{dd}^{-1}(d - Gm)$ 达到极小，而不是使 $|d - Gm|^2$ 达到极小。换言之，必须用权重矩阵使加权的残差平方和达到极小，此权重矩阵是数据协方差矩阵的逆。

同样，在模型空间中求极小时可作类似的修正。若 R_{mm} 不是正比于单位矩阵，则可用 $\tilde{m}R_{mm}^{-1}m$ 的极小来代替与广义逆有关的 $|m|^2$ 的极小。

可是与 R_{dd} 不同，R_{mm} 不能直接测量。这里人为因素多些，会把主观因素带入反演问题。当把地球模型参数用不同的层厚离散化时，很明显，自然就要求不同单位的 R_{mm} 矩阵。当模型 $m(r)$ 是地心距离 r 的连续函数时，广义逆要求 $\int_0^1 |m(r)|^2 dr$ 取极小，这里的积分上限相应取在地表。

若用有限和作积分的近似：

$$\int_0^1 |m(r)|^2 dr \sim \sum_i |m(r_i)|^2 \Delta r_i$$

且选层厚 Δr_i 为不同时，那么很明显 Δr_i 应取为求极小时的权重。这种情况下，$\boldsymbol{R}_{mm}$ 是元素为 $1/\Delta r_i$ 的对角矩阵。

另一简单例子是模型参数有不同的物理量纲或以不同单位测量的情况。这时这些参数应在对 $|\boldsymbol{m}|^2$ 求极小前适当地归一化。$\boldsymbol{R}_{mm}$ 可选为由地球模型参数的期望方差所组成的对角矩阵。

此外，我们可以对地球内部物理特性涨落的均值事先有些概念，这样在构成合适的 $\boldsymbol{R}_{mm}$ 时便能使用这样的原有的知识。

现在求对数据空间的 $\widetilde{(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{m})}\boldsymbol{R}_{dd}^{-1}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{m})$ 和模型空间的 $\tilde{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{R}_{mm}^{-1}\boldsymbol{m}$ 取极小时的解。和滤波器设计的取名法相类似，可将此称为最大似然逆。如 Wiggins(1972)和 Jachson (1972) 所示，解可由变换坐标系后的广义逆给出

由于 $\boldsymbol{R}_{dd}$ 和 $\boldsymbol{R}_{mm}$ 是正定矩阵，总能求出正交本征矢量矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{M}$，并把它们表示为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{dd} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_d\tilde{\boldsymbol{D}},\\
\boldsymbol{R}_{mm} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}_m\tilde{\boldsymbol{M}},
\end{aligned}
\tag{12.113}
$$

式中 $\boldsymbol{\Lambda}_d$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 是其元素分别为 $\boldsymbol{R}_{dd}$ 和 $\boldsymbol{R}_{mm}$ 的本征值的正交矩阵。这些本征值没有一个是零，且 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 是完备的（即矩阵的列矢量跨及整个空间)。$\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{D}}=\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{M}}=\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}$。

现在用下列关系式引入一组新的变量：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{d}' &= \boldsymbol{\Lambda}_d^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{d},\\
\boldsymbol{m}' &= \boldsymbol{\Lambda}_m^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{m},\\
\boldsymbol{G}' &= \boldsymbol{\Lambda}_d^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2},
\end{aligned}
\tag{12.114}
$$

即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{d} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_d^{1/2}\boldsymbol{d}',\\
\boldsymbol{m} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\boldsymbol{m}',\\
\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_d^{1/2}\boldsymbol{G}'\boldsymbol{\Lambda}_m^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{M}}.
\end{aligned}
\tag{12.115}
$$

通过这些变换，有

$$
\widetilde{(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{m})}\boldsymbol{R}_{dd}^{-1}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{m})=|\boldsymbol{d}'-\boldsymbol{G}'\boldsymbol{m}'|^2
$$

和

$$
\tilde{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{R}_{mm}^{-1}\boldsymbol{m}=|\boldsymbol{m}'|^2.
$$

G' 的广义逆会使上述两个量达到极小。用新变量可把结果写成

$$\boldsymbol{m}'_g = \boldsymbol{G}'^{-1}_g \boldsymbol{d}'.$$

将上式变换回到旧的变量，则可将最大似然逆解 $\boldsymbol{m}_{\max}$ 写成：

$$\boldsymbol{m}_{\max} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\boldsymbol{m}'_g. \qquad (12.116)$$

在 Wiggins (1972) 的分析中，$\boldsymbol{R}_{dd}$ 和 $\boldsymbol{R}_{mm}$ 都假定为对角的，且因为 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 假设是单位矩阵，上述变量变换是无足轻重的问题。

补充 12.3

地震定位

地震学研究中最古老的反演问题是使用由某些地震或爆炸产生的体波在几个不同台站的到时数据，来反演震源的空间坐标和发生时刻对该问题。利用点源和沿几何射线的积分给出的走时是适宜的。

地球结构和射线路径的识别（对一特定的观测到时）通常假定是已知的、固定的，因而只有四个模型参数：深度、两个水平坐标和发震时刻。

若 t_i 是第 i 个数据（在某一特定台站上的到时，并假定有观测误差），$T_i = T_i(\boldsymbol{a})$ 是理论值[式中 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 是模型参数]。很明显，若无系统误差，则希望以某种方式将所有残差 $t_i - T_i(\boldsymbol{a})$ 达到极小。设 σ_i 是 t_i 的标准偏差，定义

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}[t_i - T_i(\boldsymbol{a})]^2/\sigma_i^2, \qquad (1)$$

式中 n 是观测值数目，使用使 χ^2 为极小的那个值 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 来估算模型参数。用加权的残差平方和求极小以估算震源坐标的方法很明显来源于 L. Geiger 在 1910 年前后的想法。

若将 $\boldsymbol{a}^0$ 作为 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 的尝试值，使它足够接近 $\hat{\boldsymbol{a}}$，以致在 $\boldsymbol{a}=\hat{\boldsymbol{a}}$ 和 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^0$ 之间 $\partial T_i/\partial a_j$ 实际上不变化，则（采用求和惯例）

$$0=\frac{\partial \chi^2}{\partial a_j}\bigg|_{\hat{a}} \sim 2\left(d_i(\boldsymbol{a}^0)+(\hat{a}_k - a_k^0)\frac{\partial d_i}{\partial a_k}(\boldsymbol{a}^0)\right)\frac{\partial d_i}{\partial a_j}(\boldsymbol{a}^0), \qquad (2)$$

式中 $d_i(\boldsymbol{a})=[t_i - T_i(\boldsymbol{a})]/\sigma_i$。由此可见，将式 (2) 写为

$$\tilde{G}d = \tilde{G}Gm, \tag{3}$$

其中

$$G_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial a_j}(a^0) \text{和} \tilde{G}_{ij} = G_{ji}.$$

则可从残差 d 得出模型校正值 $m = a^0 - a^1$。

在应用最小二乘方进行参数估算的理论中，式 (3)是大家知道的正则方程。若 $\hat{a}$ 和 a^0 的偏导数相差很大的话，则必须对 $\bar{a}$ 进行迭代。请注意，(3) 是用 $d = Gm$ 求解的， 该式可通过使方程组 $t_i - T_i(\bar{a})/\sigma_i = 0$ 线性化求得，也就是说，要求每个残差都很小。 通常情况下，观测值多于模型参数．因而（以 12.3.1 节的术语来说）没有 V_0，但有 U_0。从 (12.101) 可见，(4)的广义逆只是 (3) 的普通的解，$\tilde{m} = (\tilde{G}G)^{-1}\tilde{G}d$。

地震定位问题虽然可以作为广义线性反演理论的一个实例，然而从六十年代后期以来，该理论的进展并未使定位问题完全解决。几十年来专门研究地震定位时所取得的经验可应用于其它反演问题的研究，尤其在 U_0 存在时可能产生的问题。这点可能很重要，因此在本补充的最后一部分中，将阐述三项地震定位的专门分析成果。

(i) 由于 ($\tilde{G}G$) 可能接近于奇异矩阵，且由其计算出的逆可能不精确，因而在 (3) 的通解中可能出现数值的困难。 Lee 和 Lahr (1972)把接近的奇异性与受数据很少约束的模型参数联系起来。因而在每一迭代步骤中他们选择使 a 的这些病态约束的分量（常是地震深度）都是固定的， 同时把它们从正则方程里消去， 并且不去处理 χ^2 的局部极小。Buland (1976) 通过计算 ($\tilde{G}G$) 的条件数，即其最大本征值与最小本征值之比，解决了数值定量的困难，他发现在获取数据的台阵外，几倍于台阵直径的距离上的震源， 对只用 P 到时的反演， 条件数可能超过 10^{24}。 他提出对 $d = Gm$ 求反演 （运用 Householder 的 QR 算法)，因为它的条件数是 (3) 的条件数的平方根。

若能用 S 到时、深度震相或靠近震源的台站的记录，则条件数可以大大改善。此外，Smith (1976) 发现适当选择模型参数的单位，可使 G 的列的定标能够改善条件数。

(ii) 请注意，如果地震反复在同一个已知震源发生，其发震时刻已知，并且由此得到一系列观测的走时组，其中每一个事件与一组走

时对应，在这样的试验中（1）式里的 χ^2 就是具有所谓 n 个自由度的 χ^2 分布。我们的情况不同，因为对每一未知震源只有一组数据可用。在这种情况下，式 $\tilde{G}(d-Gm)=0$ 把四个线性约束施加于模型参数，以致只存在 $n-4$ 个自由度。对一已知自由度数，比如说在 95% 的情况下（比如说），χ^2 应取在用标准统计表能查到的数值范围内，求出式（1）的最小值 $\chi^2(\hat{a})$ 便可检查此值是否处于 95% 置信度值的范围内了。在这个意义上说，请检查一下，是否应舍弃该解（也许是由假设了一个较差的地球模型造成的）。

在（12.109）中曾给出模型参数的解的方差，由于将残差归一化了，即 $\langle\Delta d\Delta\tilde{d}\rangle=I$，因而（12.109）可简化成

$$\langle\Delta m\Delta\tilde{m}\rangle=(\tilde{G}G)^{-1}, \tag{4}$$

若事先不知道到时误差，则根据对 t_i 间相对误差 r_i 的了解，能估算出绝对误差 σ_i，因此采用（4）。可以这样进行：用 r_i 代替 σ_i 构成式（1）中的和，再取极小求得 $\hat{a}$，设 $\sigma_i^2=\lambda r_i^2$，这里 λ 是数据的某一总常数，一旦得知，即可给出绝对误差，从而提供模型方差。由于对 $n-4$ 个自由度，χ^2 的预期值是 $n-4$，因此用

$$\hat{\lambda}(n-4)=\sum_{i=1}^{n}[t_i-T_i(\hat{a})]^2/r_i^2.$$

估算 λ 的值(Flinn，1965)。实际上，因为有模型误差（见下面(iii)），绝对误差 σ_i 的最终估算可能很差。然后为了评定与给定台阵有关的定位误差，必须进行专门的统计尝试，包括把随机误差迭加到计算走时上去(Evernden，1969)。

(iii) 计算可观测的 $T_i(a)$ 时，若使用一个不准确的地球模型，那就会严重影响有科学价值的估算震源坐标的尝试。这对要处理其它反演问题的人，是个特别值得警惕的问题。

若在包括震源和接收点区域内的地球结构是横向均匀，但随深度变化的，则结构参数可加到 a_1，a_2，a_3，a_4 上，根据几组到时数据可估算震源和地球模型（Crosson，1976 a，b）。对横向不均匀性也可采取 12.3.9 节的方法，但这里对地震定位所作的努力取决于三维地球结构的大量模型参数的确定问题。然而，常采用的方法是选定地球结构（选取其 $T_i(a)$ 的计算较为简单的）并假设残差 $t_i-T_i(a)$ 的

那个部分是由于台站校正产生的。例如，这可能是第 i 个台站下沉积层产生的恒定的延迟，加上取决于震中离台站的方位这一项，这项是用以补偿局部倾斜结构的。于是除了起初有意义的模型参数 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 之外，还有以特殊方式模拟数据残差的新的未知数。使在地球物理问题参数化研究所做的努力转移到较直接地把数据参数化的研究工作中去，由于 $\boldsymbol{b}$ 矢量对不同震源应是相同的，不同地震的到时数据组可被用于联合反演，以估算对所有震源的台站校正值。这种震源联合测定法是由 Douglas (1967) 和 Freedman (1967) 研究出来的。该方法要求具有宽广的震源分布，以致可识别方位相关的台站校正值。震源联合测定法还应用于与一特定地震（常称为主事件或标定事件）有关的许多地震的定位问题。这时不希望有很宽的震源分布，而希望这些地震能相当接近主事件。Dewey (1972) 详细描述了这种方法，现在它已应用于世界上很多地震活动地区的定位问题。

E. Smith(1978)检查了采用错误的地球模型计算 $T_i(\boldsymbol{a})$的影响，指出，模型误差问题不是由于对 Gauss 分布的可能偏离而产生的。(对最小二乘方解的统计解释，误差不需要正规地分布。)然而，在震源联合测定的情况下，问题是模型误差引入第 i 个事件在第 j 台站的残差和第 k 个事件在第 l 台站的残差间的相关性。凡是该相关性无法精确估算的地方，地震定位的置信度区域即无法在合理的基础上构成。

12.3.5 随机逆

广义逆的计算要求前节所述的本征矢量分析。Franklin (1970) 介绍的随机逆只要求矩阵乘法和求逆，并提供对广义逆和最大似然逆解的另一个可供选择的解。

我们认为数据由信号和噪声组成：

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{Gm}+\boldsymbol{n}, \tag{12.117}$$

且 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 都是随机过程。假设它们的均值为零，

$$\langle \boldsymbol{m}\rangle=\langle \boldsymbol{n}\rangle=0 \tag{12.118}$$

（否则可从最初的过程中减去均值），它们的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{m}\tilde{\boldsymbol{m}}\rangle &= \boldsymbol{R}_{mm},\\ \langle \boldsymbol{n}\tilde{\boldsymbol{n}}\rangle &= \boldsymbol{R}_{nn}.\end{aligned} \tag{12.119}$$

随机逆算子 $\boldsymbol{L}$ 通过对 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{Ld}$ 之间偏差的统计平均值求极小而求得。考虑一个反复产生 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的试验。假设在第 k 次试验时它们的采样值为 $\boldsymbol{m}^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{n}^{(k)}$。计算每次试验的 $\boldsymbol{Ld}$，并求出使下式达到极小的 $\boldsymbol{L}$：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(m_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{N} L_{ij} d_j^{(k)}\right)^2.$$

对算子 $\boldsymbol{L}$ 求上式的极小，能容易地将它对 L_{il} 求导数，并令结果等于零

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(m_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{N} L_{ij} d_j^{(k)}\right) d_l^{(k)} = 0,$$

即可得到。这可简化成

$$\langle \boldsymbol{m}\tilde{\boldsymbol{d}}\rangle = \boldsymbol{L}\langle \boldsymbol{d}\tilde{\boldsymbol{d}}\rangle$$

或写成

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}_{md}\boldsymbol{R}_{dd}^{-1}. \tag{12.120}$$

另一方面，若 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 是不相关的（$\langle \boldsymbol{m}\tilde{\boldsymbol{n}}\rangle = 0$），可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{dd} &= \langle \boldsymbol{d}\tilde{\boldsymbol{d}}\rangle\\ &= \langle(\boldsymbol{Gm}+\boldsymbol{n})\widetilde{(\boldsymbol{Gm}+\boldsymbol{n})}\rangle\\ &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{R}_{mm}\tilde{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{R}_{nn}.\end{aligned} \tag{12.121}$$

同样，我们发现

$$\boldsymbol{R}_{md} = \boldsymbol{R}_{mm}\tilde{\boldsymbol{G}}. \tag{12.122}$$

将（12.121）和（12.122）代入（12.120），可得

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}_{mm}\tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}_{mm}\tilde{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{R}_{nn})^{-1}. \tag{12.123}$$

有意义的是注意到前节所用的变量变换简化了随机逆。将随机逆解表达为 $\hat{\boldsymbol{m}}$，据（12.120）和（12.122）求得

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{m}} &= \boldsymbol{R}_{md}\boldsymbol{R}_{dd}^{-1}\boldsymbol{d}\\ &= \boldsymbol{R}_{mm}\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{R}_{dd}^{-1}\boldsymbol{d}.\end{aligned}$$

用（12.113）和（12.115）给出的变换，我们得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{mm} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}_m\tilde{\boldsymbol{M}}, \\
\boldsymbol{R}_{dd}^{-1} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{d}_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{D}}, \\
\boldsymbol{m} &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\boldsymbol{m}', \\
\boldsymbol{d} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_d^{1/2}\boldsymbol{d}'.
\end{aligned}
\tag{12.124}
$$

因而

$$
\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}_m^{1/2}\hat{\boldsymbol{m}}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}_m\tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{d}
$$

可用（12.114）将上式写为

$$
\hat{\boldsymbol{m}}' = \tilde{\boldsymbol{G}}'\boldsymbol{d}'. \tag{12.125}
$$

随机逆算子就是在已变换的坐标中 $\boldsymbol{G}$ 的转置。在下节中可看到 Gilbert(1971 b) 讨论了类似的已简化的反演过程。

这里有随机逆的一个特殊情况，其中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{mm} &= \sigma_m^2\boldsymbol{I}, \\
\boldsymbol{R}_{nn} &= \sigma_n^2\boldsymbol{I}
\end{aligned}
\tag{12.126}
$$

给出了对该广义逆的较精确的近似。将(12.126) 代入(12.123)，则有随机逆算子

$$
\boldsymbol{L}_0 = \tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}} + e^2\boldsymbol{I})^{-1}, \tag{12.127}
$$

式中

$$
e^2 = \sigma_n^2/\sigma_m^2.
$$

为了用本征矢量求上述解，使用一组完备本征矢量组 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{U}_p, \ \boldsymbol{U}_0]$，得

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}} + e^2\boldsymbol{I})^{-1} &= [\boldsymbol{U}_p, \ \boldsymbol{U}_0]\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\Lambda}_p^2 + e^2\boldsymbol{I})^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2}\boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{U}}_p \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_0 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{U}_p(\boldsymbol{\Lambda}_p^2 + e^2\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{U}}_p + \boldsymbol{U}_0 e^{-2}\tilde{\boldsymbol{U}}_0.
\end{aligned}
$$

由于 $\tilde{\boldsymbol{G}} = \tilde{\boldsymbol{V}}_p\boldsymbol{\Lambda}_p\tilde{\boldsymbol{U}}_p$ 和 $\tilde{\boldsymbol{U}}_p\boldsymbol{U}_0 = 0$，求得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_0 &= \tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}} + e^2\boldsymbol{I})^{-1} \\
&= \boldsymbol{V}_p\frac{\boldsymbol{\Lambda}_p}{\boldsymbol{\Lambda}_p^2 + e^2\boldsymbol{I}}\tilde{\boldsymbol{U}}_p.
\end{aligned}
\tag{12.128}
$$

比较此式与广义逆（12.100），可见 $\boldsymbol{L}_0$ 是对后者的近似。其本

征值小于ε^2的本征矢量的作用在随机逆中被抑制了。

算子$\boldsymbol{L}_0$还可写为

$$\boldsymbol{L}_0=(\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}}+\varepsilon^2\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{G}}, \tag{12.129}$$

因为 $(\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{G}+\varepsilon^2\boldsymbol{I})^{-1}=\boldsymbol{V}_p(\boldsymbol{\Lambda}_p^2+\varepsilon^2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{V}_p+\boldsymbol{V}_0\varepsilon^{-2}\tilde{\boldsymbol{V}}_0$,

所以 $$\tilde{\boldsymbol{V}}_0\boldsymbol{V}_p=0。 \tag{12.129}$$

给出的逆解叫做阻尼最小二乘方。Levenberg(1944) 对数据残差的平方和及其权重反比于方差的模型参数取极小，便得到阻尼最小二乘方，即$\sigma_n^{-2}|\boldsymbol{d}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{m}|^2+\sigma_m^{-2}|\boldsymbol{m}|^2$，其中仍然是$\varepsilon^2=\sigma_n^2/\sigma_m^2$。

$\boldsymbol{L}_0$的分辨矩阵是

$$\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{G}=\boldsymbol{V}_p\frac{\boldsymbol{\Lambda}_p^2}{\boldsymbol{\Lambda}_p^2+\varepsilon^2\boldsymbol{I}}\tilde{\boldsymbol{V}}_p. \tag{12.130}$$

$\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{G}$ 的迹是模型空间分辨率的量度，正如12.3.3节中所讨论的，可写成

$$\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{G}\text{的迹}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2+\varepsilon^2}, \tag{12.131}$$

很明显这小于p，因此ε^2的引入会降低分辨率，但通过简化协方差可使解稳定。协方差矩阵由（12.86）给出：

$$\begin{aligned}\langle\Delta\hat{\boldsymbol{m}}\Delta\hat{\boldsymbol{m}}\rangle&=\sigma_d^2\boldsymbol{L}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_0\\&=\sigma_d^2\boldsymbol{V}_p\frac{\boldsymbol{\Lambda}_p^2}{(\boldsymbol{\Lambda}_p^2+\varepsilon^2\boldsymbol{I})^2}\tilde{\boldsymbol{V}}_p,\end{aligned} \tag{12.132}$$

假设每个单独预测值有一致的独立的误差，式中σ_d^2是数据$\boldsymbol{d}$中误差$\Delta\boldsymbol{d}$的方差。我们的随机模型中$\Delta\boldsymbol{d}$相应于$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{m}$，并且$\sigma_d^2=\sigma_n^2$。这样，$\varepsilon^2$的增加减少了模型参数估算的误差，同时牺牲了分辨率。在随机逆的情况下，ε^2的最佳选取值是σ_n^2/σ_m^2（噪声方差与模型方差之比），如（12.127）中所示。

让我们求出实例问题的$\boldsymbol{L}_0$，并把它与前面得到的广义逆$\boldsymbol{G}_\varepsilon^{-1}$比较：

由于

$$\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

和

$$(\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}}+\varepsilon^2\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2+\varepsilon^2} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2-1} & \dfrac{1}{(1+\varepsilon^2)^2-1}\\ 0 & \dfrac{1}{(1+\varepsilon^2)^2-1} & \dfrac{1+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2-1}\end{pmatrix},$$

求得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_0&=\tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}}+\varepsilon^2\boldsymbol{I})^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2+\varepsilon^2} & 0 & 0\\ \dfrac{1}{2+\varepsilon^2} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2+\varepsilon^2} & \dfrac{-1}{2+\varepsilon^2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

在 ε^2 接近零的极限情况下——即噪声方差为零时，随机逆收敛为广义逆。在我们的例子中

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{L}_0=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & 0 & 0\\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{G}_g^{-1}.$$

12.3.6 Backus 和 Gilbert 的方法

前几节中用 Lanczos 的精细的本征矢量分析法解了一般线性方程组的反演问题，把它推广到数据和模型的一般协方差矩阵的情况，并介绍了 Franklin 的随机逆。我们已证明在特殊情况下随机逆给出了广义逆的良好近似。

Backus 和 Gilbert 在 1967 年以来所发表的一系列论文中，不

仅把地震学家的注意力吸引到一般线性方程组的反演问题上，并且作出了几项与前几节论及的方法迥然不同的独特贡献。这里将简要介绍他们的方法。

在他们的第一篇论文（1967）中，他们证明了地球物理反演问题中的高度非唯一性，提供了满足观测数据，并与最初假设的偏离达到极小的实际解．后来 Gilbert（1971 b）阐述了考虑数据误差的情况下求极小解的过程。

他们的极小解与 $U_0=0$ 的广义逆一致，于是极小解 $\hat{m}$ 由（12.102）给出：

$$\hat{\boldsymbol{m}}=\tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}})^{-1}\boldsymbol{d}.$$

引入数据空间中的矢量 $\boldsymbol{v}$，可将此式改写为：

$$\hat{\boldsymbol{m}}=\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{v}，\text{式中}\quad(\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{d}. \tag{12.133}$$

Backus 和 Gilbert 认为模型是地心距离 r 的连续函数。此数据由（12.79）表示，

$$d_i=\int_0^{r_\oplus}G_i(r)m(r)dr.$$

为将离散情况的结果转换为连续问题的解，设

$$\begin{aligned}d_i&=\sum_{k=1}^{M}G_i(k\Delta r)m(k\Delta r)\Delta r,\\ m_k&=m(k\Delta r)(\Delta r)^{1/2},\\ G_{ik}&=G_i(k\Delta r)(\Delta r)^{1/2}.\end{aligned} \tag{12.134}$$

接着可使

$$\sum_{k=1}^{M}|m(k\Delta r)|^2\Delta r,$$

达到极小的 $\hat{m}(r)$ 由式（12.133）给出：

$$\hat{m}(r)=\sum_{i=1}^{N}G_i(r)v_i \tag{12.135}$$

其中 v_i 由

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i \int_0^{r_\oplus} G_i(r) G_j(r) dr = d_j$$

给出当数据有误差时，上式可由下式代替：

$$d_j - \sigma_j \leq \sum_{i=1}^{N} \nu_i \int_0^{r_\oplus} G_i(r) G_j(r) dr \leq d_j + \sigma_j, \quad (13.136)$$

式中 σ_i 是 d_i 的标准误差。现在要求出满足上述不等式并使

$$\int |\boldsymbol{m}|^2 dr = \int |\sum G_i(r) \boldsymbol{\nu}_i|^2 dr \quad (12.137)$$

达到极小的 $\boldsymbol{\nu}$。将（12.136）和（12.137）分别改写成

$$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\nu} \leq \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\sigma} \quad (12.138)$$

和

$$|\boldsymbol{m}|^2 = \tilde{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\nu}, \quad (12.139)$$

为简化上述求 $\boldsymbol{\nu}$ 的过程，引入可同时使 $\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}}$ 和 $\boldsymbol{R}_{dd} = \langle \Delta \boldsymbol{d} \Delta \tilde{\boldsymbol{d}} \rangle$ 对角化的变换 $\boldsymbol{T}$。据（12.113），有

$$\boldsymbol{R}_{dd} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_d\tilde{\boldsymbol{D}}.$$

定义正定矩阵

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Lambda}_d^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_d^{-1/2}$$

并将其本征矢量矩阵表达为 $\boldsymbol{R}$，写出

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{R}},$$

式中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵。然后 $\boldsymbol{T}$ 定义为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Lambda}_d^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{D}}. \quad (12.140)$$

容易证明 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{R}_{dd}\tilde{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}$。

用下式引入一组新变量：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}' &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{d}, \\ \boldsymbol{\nu} &= \tilde{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\nu}', \end{aligned} \quad (12.141)$$

（12.138）和（12.139）可简化为

$$\boldsymbol{d}' - \boldsymbol{\sigma}' \leqslant \boldsymbol{\nu}' \leqslant \boldsymbol{d}' + \boldsymbol{\sigma}' \quad (12.142)$$

和

$$|\boldsymbol{m}|^2 = |\boldsymbol{\nu}'|^2. \quad (12.143)$$

用此变换，求能对 $|\boldsymbol{m}'|^2$ 取极小的 $\boldsymbol{v}'$ 的过程就变得十分简单了。首先以误差 σ_i' 递增的顺序排列数据分量 d_2'。若 $|d_1'|<|\sigma_1'|$，我们令 $v_1'=0$ 并进而到 d_2'。否则，通过比较 $|d_1'+\sigma_1'|$ 和 $|d_1'-\sigma_1'|$ 来确定 v_1'。若 $|d_1'+\sigma_1'|$ 大于 $|d_1'-\sigma_1'|$，则设 $v_1'=d_1'-\sigma_1'$，若 $|d_1'-\sigma_1'|$ 大于 $|d_1'+\sigma_1'|$，则令 $v_1'=d_1'+\sigma_1'$ 并进而到 d_2'。该过程证实了 $|\boldsymbol{m}|^2=\sum_i v_i'^2$ 的极小。

在他们的第二篇论文中，Backus 和 Gilbert(1968) 把注意力集中于模型空间中的分辨率并引入 δ 判据。

平均核 $A(r_0, r)$ 定义为权重函数，在 r_0 的模型的估算 $\hat{m}(r_0)$ 可表示为“真实” m_r 的加权平均：

$$\hat{m}(r_0)=\int_0^{r_\oplus}A(r_0, r)m(r)dr. \tag{12.144}$$

$A(r_0, r)$ 等同于离散问题中的分辨矩阵。在线性反演中，模型估算 $\hat{m}(r_0)$ 是数据的线性组合，因此可写成

$$\hat{m}(r_0)=\sum_{i=1}^{N}a_i d_i=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{d}, \tag{12.145}$$

式中 $a_i=a_i(r_0)$ 是 r_0 的函数。据(12.144),(12.145)和(12.79)，求得

$$A(r_0, r)=\sum_{i=1}^{N}a_i G_i(r)=\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{G}(r). \tag{12.146}$$

现在将 δ 判据施于 $A(r_0, r)$ 来测定 a_i，也就是使 $A(r_0, r)$ 尽可能象一个 Dirac δ 函数，以使 (12.144)的 $\hat{m}(r_0)$ 接近 $m(r_0)$。

Backus 和 Gilbert 讨论了下列两种判据：

$$J=\int_0^{r_\oplus}[A(r_0, r)-\delta(r-r_0)]^2dr,$$

$$K=12\int_0^{r_\oplus}(r-r_0)^2[A(r_0,r)-\delta(r-r_0)]^2dr.$$

使 J 达到极小，这样就会使 $A(r_0,r)$ 更接近最小二乘方意义上的 δ 函数。很容易便可证明 J 判据能给出如极小解相同的结果。

令

$$(\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}})_{ij}=\int_0^{r_\oplus}G_i(r)G_j(r)dr, \qquad (12.147)$$

可写出

$$J=\sum_i\sum_j a_ia_j(\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{G}})_{ij}-2\sum_i a_iG_i(r_0)+\int_0^{r_\oplus}\{\delta(r-r_0)\}^2dr.$$

对 a_i 求 J 的极小，可得

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{G}\widetilde{\boldsymbol{G}})^{-1}\boldsymbol{G}(r_0),$$

然后

$$A(r_0,r)=\widetilde{\boldsymbol{G}}(r_0)(\boldsymbol{G}\widetilde{\boldsymbol{G}})^{-1}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}),$$

$$\hat{m}(r_0)=\int A(r_0,r)m(r)dr$$

$$=\widetilde{\boldsymbol{G}}(r_0)(\boldsymbol{G}\widetilde{\boldsymbol{G}})^{-1}\int\boldsymbol{G}(r)m(r)d\boldsymbol{r}$$

$$=\widetilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{G}\widetilde{\boldsymbol{G}})^{-1}\boldsymbol{d}. \qquad (12.148)$$

这些结果对极小解(12.102)来说是相同的，也就是 $\boldsymbol{U}_0=0$ 时的广义逆.

另一方面，K 判据导至新的结果。该判据避免了 J 中 δ 函数的平方，还比 J 更有效地压制 $A(r_0,r)$的侧瓣。K 有 r 的量纲，它是沿着 r 轴在 r_0 附近平均核分布的量度。K 判据中，在下列约束下 K 达到极小：

$$\int_0^{r_\oplus}A(r_0,r)dr=1. \qquad (12.149)$$

出现在 K 定义中的因子 12 是选取来为了在 $A(r_0,r)$类似于$\delta(r-r_0)$时，K 成为 $A(r_0,r)$的峰值宽度(分布)的量度。

引入分布矩阵 $\boldsymbol{S}$，其元素为

$$S_{ij}=12\int_0^{r_\oplus}dr(r-r_0)^2G_i(r)G_j(r),$$

这样我们有

$$K=\sum_i\sum_j a_ia_jS_{ij}$$

$$\tilde{a}Sa. \tag{12.150}$$

由(12.149)给出的约束可写成

$$\sum_i \int_0^{r_0} a_i \tilde{G}_i(r) dr = 1$$

即

$$\tilde{a}u = 1, \tag{12.151}$$

式中

$$u_i = \int_0^{r_0} G_i(r) dr. \tag{12.152}$$

在约束 $\tilde{a}u=1$ 的情况下，看一下几何图形即可相当容易地对 $\tilde{a}Sa$ 求极小。由于 S 是正定的，因此式

$$\tilde{a}Sa = \text{常数}$$

表示了多维空间中由矢量 a 所跨及的一个椭球面。约束 $\tilde{a}u=1$ 表示了一个固定平面。如图 12.18 所示，$\tilde{a}Sa$的极小值出现在椭球面与该平面相切时。若椭球体面比它小，则无解；若椭球面比它大，则 $\tilde{a}Sa$ 也大。

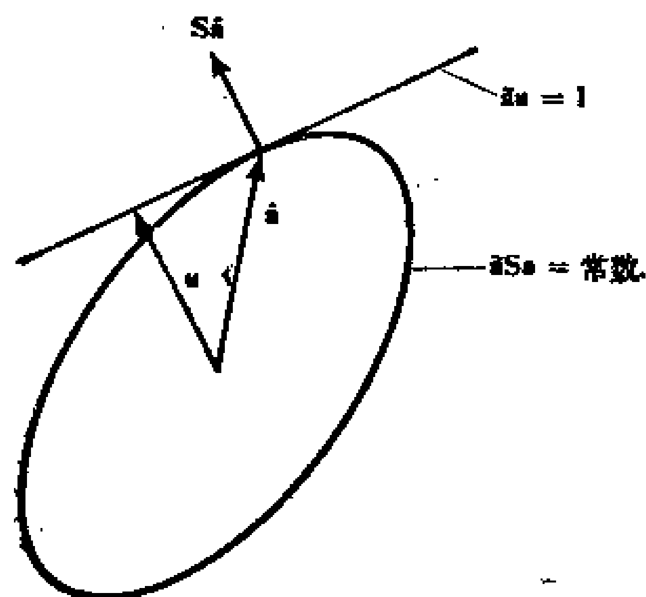


图 12.18
估算 $\hat{a}$ 的几何解释

由于 $S\boldsymbol{a}$ 是椭球面的法线，且它应平行于与平面接触点的法线，因此 $S\hat{\boldsymbol{a}}$ 必须平行于 $\boldsymbol{u}$(这里 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 是所期望的解)，则

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \lambda \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u},$$

式中 λ 是不变的标量。由于 $\tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u}=1$，$\lambda=1/(\tilde{\boldsymbol{u}}S^{-1}\boldsymbol{u})$，于是有

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \frac{S^{-1}\boldsymbol{u}}{\tilde{\boldsymbol{u}}S^{-1}\boldsymbol{u}}.$$

相应的模型估算由(12.145)给出

$$\hat{m}(r_0) = \tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{d} = \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}S^{-1}\boldsymbol{d}}{\tilde{\boldsymbol{u}}S^{-1}\boldsymbol{u}}, \tag{12.153}$$

并测定平均核为

$$\boldsymbol{A}(r_0,\boldsymbol{r}) = \tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}S^{-1}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})}{\tilde{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{u}} \tag{12.154}$$

虽然解 $\hat{m}(r_0)$ 并不精确地满足最初的方程(12.79)，但它很有用，因为它代表“真实”模型 $m(r)$ 和一个已知且成形良好的权重函数 $A(r_0,r)$的加权平均。

最后，在 Backus 和Gilbert(1970)的第三篇论文中，对分辨模型细节的能力与估算模型参数的可靠性之间的权衡关系作了广泛的调查研究。

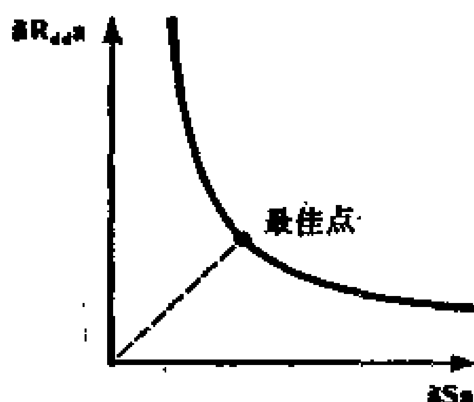


图 12.19
分辨率和误差间的权衡关系

模型估算$\hat{m}(r_0)$ 中的误差与数据中误差 $\Delta\boldsymbol{d}$ 的关系为

$$\Delta\hat{m}(r_0) = \tilde{\boldsymbol{a}}\Delta\boldsymbol{d}.$$

因而 $\hat{m}(r_0)$的方差是

$$\langle|\Delta\hat{m}(r_0)|^2\rangle = \tilde{\boldsymbol{a}}\langle\Delta\boldsymbol{d}\Delta\tilde{\boldsymbol{d}}\rangle\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{R}_{dd}\boldsymbol{a}. \tag{12.155}$$

此分辨率又是用 $\tilde{a}Sa$ 量度的。已证明，减少误差的量度就增加分布的量度，反过来也是如此。为了求一折衷，要使两种量度的线性组合 $\tilde{a}Wa$ 达到极小，这里，在约束 $\tilde{a}u=1$ 的情况下，

$$W=(1-\alpha)S+\alpha R_{dd}\quad 0\leqq\alpha\leqq 1, \tag{12.156}$$

由下式给出解：

$$a(\alpha)=\frac{W^{-1}u}{\tilde{u}W^{-1}u}. \tag{12.157}$$

通过计算 $a=a(\alpha)$ 时的 $\tilde{a}Sa$ 和 $\tilde{a}R_{dd}a$，并如图 12.19 似地对 α 的各尝试值把它们描绘出来，则可得相应于曲线上最接近原点的点的最佳 α 值。该曲线称为权衡曲线，而且可以对不同的 r_0 独立构成。

与分辨率和误差稍有不同的类似量度已由别人引入过。例如，Der 等(1970)提出了在其对角元素为 1 的约束下，对分辨矩阵的非对角元素取极小。Jordan(1972)采用稍异于 Backus 和 Gilbert 的误差估算，证明随机逆处于权衡曲线的最佳点上。

上面已叙述了具有 Gauss 误差的数据的线性反演所有主要特点和方法，这些方法已相当广泛地应用于地震学中。例如，Dorman 和 Ewing (1962)以及 Brune 和 Dorman (1963)首先将面波频散数据反演(采用最小二乘方)。Gilbert 和 Dziewonski (1975)使用世界标准地震台网记录的简正振型数据，对震源参数和地球结构进行了深入的研究。Langston(1976)使用世界标准地震台网波形，对 Mellman和Burdick 提出的、由数据和合成地震图确定的相关函数求极大，以便从远震观测到的体波波形推导出震源参数。

12.3.7 非线性产生的限制

至此，在 12.3 节中得到的所有结果，只有在模型的扰动与可观测量的相应变化线性相关的范围中才有效。若非线性很严重，则对初始模型的校正可能使模型与数据的吻合更差，引起线性化迭代过程发散。

现在介绍 Marquardt(1963)的一种改进方法，他提出反复使用合理选择阻尼常数 ε^2 的阻尼最小二乘方解(12.128)。

假定我们要求

$$\Phi=|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M})|^2=\sum_{i=1}^{N}(D_i-f_i(\boldsymbol{M}))^2 \qquad (12.158)$$

的极小，式中 $D_i(i=1,2,\cdots,N)$和 $M_j(j=1,2,\cdots,M)$分别是数据和模型。先推测一个初始模型 $\boldsymbol{M}^0$，令

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M})\sim\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M}^0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{m},$$

式中

$$G_{ij}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial M_j}\right)_{M=M^0},$$

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}^0,$$

从而将数据和模型的关系线性化。令 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M}^0)$，得$\Phi\sim|\boldsymbol{d}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{m}|^2$.

取 ϕ 的极小，求得熟悉的最小二乘方解(12.101)

$$\boldsymbol{m}^L=(\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{G})^{-1}\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{d} \qquad (12.159)$$

标准的线性化迭代是这样进行的：先建立第二个模型 $\boldsymbol{M}^1=\boldsymbol{M}^0+\boldsymbol{m}^L$，然后令

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M})\sim\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M}^1)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{m},$$

现在式中

$$G_{ij}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial M_j}\right)_{M=M^1},$$

从而修正了线性关系，再重复求极小的过程。

实际上，上述过程可能不收敛（Hartley，1961）。一种改进的办法是使第二个模型为

$$\boldsymbol{M}^1=\boldsymbol{M}^0+K\boldsymbol{m}^L,$$

这里 $0<K\leqslant1$。即使K很小，也经常不收敛。

另一种完全不同的方法是梯度法。该方法可在模型空间里求得 ϕ 的最快速变化的方向。由于 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}^0$ 时，与 $\phi=$常数的面相切的平面方程是

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial M_i}(M_i - M_i^0) = 0,$$

因此，与该平面正交的最快速变化的方向由矢量 $\boldsymbol{m}^G$ 给出，在 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^0$ 处，其分量是$(-\partial\Phi/\partial M_1, \ -\partial\Phi/\partial M_2, \ \cdots, \ -\partial\Phi/\partial M_N)$。

据(12.158)，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial M_j} &= -2\sum_i (D_i - f_i(M)) \frac{\partial f_i}{\partial M_j} \\ &= -2\sum_i d_i \frac{\partial f_i}{\partial M_j} \\ &= -2\sum_i G_{ij} d_i,\end{aligned} \qquad (12.160)$$

则求得 $\boldsymbol{m}^G$ 平行于 $\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{d}$。

用梯度法对模型进行校正总可以收敛，虽然该收敛可能很缓慢。另一方面，当它收敛时，最小二乘方迭代收敛得极迅速。矢量 $\boldsymbol{m}^G$ 和 $\boldsymbol{m}^L$ 常常分开约 90°。

因而取 $\boldsymbol{m}^G$ 和 $\boldsymbol{m}^L$ 间的中间方向较为合理。Marquardt 证明了阻尼最小二乘方解(12.128)，

$$\hat{\boldsymbol{m}} = (\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{G} + e^2\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{d},$$

它正指着这样一个中间方向。事实上，这是当 $e^2 \to 0$ 时，$\hat{\boldsymbol{m}} \to \boldsymbol{m}^L$；而当 $e^2 \to \infty$ 时，$\hat{\boldsymbol{m}}$ 的方向接近于 $\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{d}$ 的方向，因而也就接近于 $\boldsymbol{m}^G$ 的方向。e^2 很小时，该过程可能发散；而 e^2 大时，收敛可能太慢，经过几次尝试后，即可求出快速收敛的最佳 e^2。

在苏联，据 Keilis-Borok 和 Yanovskaya(1967)，梯度法和蒙特卡罗法已广泛应用于寻求 ϕ 的极小值。他们特别介绍了由 V. Valus 研究出的刺猬法。该方法是先运用蒙特卡罗法求出极小值范围中的一点，然后作系统搜寻，以便在极小值的相邻部分中确定可接受的 ϕ 最低值的范围。

Press(1968，1970)也经常应用蒙特卡罗法。该方法给出了正确的模型的界限，但这个收敛过程极其缓慢，若系统是完全线性的，则有一个方法可非常迅速地求得此界限。这是 Johnson

(1972)用于求得与观测数据相符的地球不同深度的最大和最小剪切速度和密度的线性规划方法。

以坐标为 $m_i(i=1, 2, \cdots, M)$ 的模型空间为例。误差为 σ_i 的观测数据 d_i 将确定由 N 对平面夹着的空间：

$$d_i+\sigma_i \geq \sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j \geq d_i-\sigma_i \quad (i=1, 2, \cdots, N). \tag{12.161}$$

这样的空间是个凸多面体，m_i 的任一线性组合 Z 会在顶点取极大或极小值。SIMPLEX 算法（Dantzig，1963）使我们能从初始顶点求得相邻顶点。求每个顶点的 Z 值，然后从一个顶点到另一顶点地搜寻，直至求出 Z 的极小值。该过程与进行 M 维搜寻的蒙特卡罗法和刺猬法相比是极其迅速的，因为这是仅对一串点进行搜寻。

12.3.8 非 Gauss 误差

除了线性假设外，基于线性反演过程的 Gauss 统计的基本假设，可能对其在地球物理数据中的应用造成严重的限制。

若数据包含着不遵循 Gauss 分布的误差，则最小二乘方判据（线性反演中最基本的判据）可能不起作用。

假定现在要估算数据 $d_i(i=1, \cdots, N)$ 的平均值。通过对下面所谓的 L_2 范数

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - m)^2$$

取极小，最小二乘方判据求得估算值。

对 m 求导，令其等于零，求得该均值的算术平均：

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}. \tag{12.162}$$

11.4.2 节中还证明了对 $\sum_i \sum_j W_{ij}(d_i-m)(d_j-m)$ 取极小的加权最小二乘方判据，相应于其协方差矩阵为 W^{-1} 的多元

Gauss 分布的最大似然估算。这样，均值的估算由加权平均值

$$m=\frac{\sum_i\sum_j W_{ij}d_i}{\sum_i\sum_j W_{ij}} \tag{12.163}$$

给出。

非 Gauss 地震数据的经典例子是 Jeffreys 在制定 Jeffreys-Bullen 走时表时遇到的走时残差的分布。如问题 11.5 所述，他使用了一个加权平均，其权重取决于每个观测值 d_i 对样本估算的均值的偏离。另一例子是如第十一章中提及但未处理的信号产生的噪声。

长尾分布的一个极端的例子是 Turkey (1965) 讨论地球物理数据时提及的 Cauchy 分布。概率密度函数是 $f(x)=(1/\pi)/(1+x^2)$。它有这样一种显著的特征，即其算术平均

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

与 x 遵循同样的分布，因而，反复试验以求平均纯粹是浪费时间。

对这一长尾分布，基于 L_1 范数的判据可能更加有效。实际上，在 L_1 范数判据中不是对如 L_2 范数中的平方和，而是对绝对值之和求极小。将 $\sum_i|x_i-m|$ 对 m 求导数，并令其为零，则得

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(x_i-m)=0. \tag{12.164}$$

若 n 是奇数，这就提供 x_i 对 m 的中值。若 n 是偶数，则 m 处于两个中值 x_i 之间。不管怎样，对均值的这一估算实际上不会受到因 x_i 中的某一个达到无限大这样的错误的影响。但这样的错误会破坏 L_2 范数的算术平均值，因而 L_1 范数的估算比较可靠有用。地球物理数据分析中 L_1 范数的计算由 Claerbout 和 Muir

(1973)提供。

12.3.9 三维地震波速结构的测定：线性反演的一个实例

以覆盖地表面积比如说 100×100 平方公里的地震台阵为例。我们要测量震中距离大于 30°的初至 P 波到时。数据组由第 i 台站对第 j 次事件的观测到时 $t_{ij}^{观测}$组成。30 个台站组成的典型台阵和世界上 100 次事件能提供 3000 个测量值。

为了反演这数据组，必须首先建立一个初始模型，计算第 i 台站和第 j 次事件预期的到时 $t_{ij}^{计算}$。用水平边界位于标准的球对称地球上的一组均匀层作为台阵下结构的初始模型。在台阵下，通常从折射波的观测，具有这样横向平均速度的层状介质，就是已知的。然后根据已公布的第 j 次事件的震中、震源深度和发震时刻，利用初始模型计算$t_{ij}^{计算}$。

由此得到观测值和计算值之间的差，即残差，它包含初始模型中没有的、关于地球的新信息。下面试图对初始模型的扰动来解释这些残差。安艺等人(Aki, Christoffersson, Husebye, 1976)将层状介质分成如图 12.20 所示的许多块，给每一块指定一个参数，用来描述相对于此块所属层的平均值的慢度的扰动变化百分数(慢度即速度的倒数)。用 m_k 表示第 k 块的参数，则可将残差写为

$$\Delta t_{ij}=t_{ij}^{观测}-t_{ij}^{计算}=\sum_{k} g_{ijk}\, m_k+t_j, \qquad (12.165)$$

式中

$$g_{ijk}=\frac{d_l}{v_l\cos\theta_l},$$

d_l 和 v_l 分别是第 l 层的厚度和速度，θ_l 是第 l 层中垂直线与未扰动的射线路径间的夹角，k 求和是对每一层中大部分路径未被扰动的块进行的。根据 fermat 原理，对于在实际射线路径附近的扰动，其到时是稳定的，因此不用沿扰动路径，而是沿未扰动路径来计算到时(见习题 13.3)。t_j 项是震源参数，它包括了所有的

台站都共有的误差，例如地震事件发震时刻的误差。请注意，(12.165)中对 k 的求和是对所有层中所有块的求和，在每一层中只选出这层中起作用的一块，这是通过对多数 (ijk) 设 $g_{(ijk)}=0$ 来达到的。

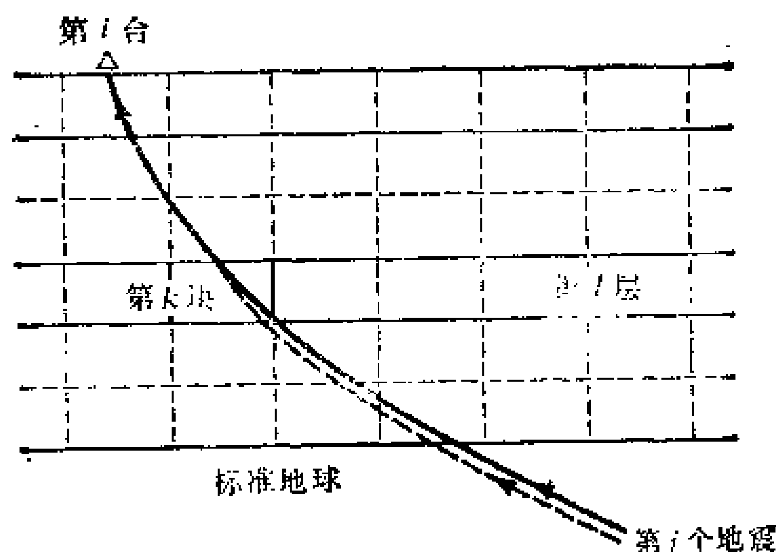


图 12.20

对二维台阵观测到的远震走时数据进行三维反演的块模型

该问题中有两个非唯一性的来源，一是由于资料不够，当两个块体总是有同样的射线路径的情况。增加对两个块体分别进行采样的那些射线路径，可消除该非唯一性。另一种非唯一性的来源是此问题所固有的，增加数据也无法将它消除。这是由于对一层的均匀扰动会以相同的量改变所有台站的到时，从而无法与震源参数 t_j 的效应区别开来。

m_k 和 t_j 的测定可分开，因为先对每个 j 的 i 取平均值，从单个方程中减去此平均值，则可从(12.165)中消去 t_j。我们有

$$\Delta t_{ij}-\overline{\Delta t_{ij}}^{(j)}=\sum_k\left(g_{ijk}-\overline{g_{ijk}}^{(j)}\right)m_k, \quad (12.166)$$

式中 $\overline{\quad}^{(j)}$ 表示第 j 次事件的台站平均值。这是我们问题的方程式(12.83) $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{Gm}$。由于上面提及的固有的非唯一性，$\boldsymbol{V}$ 空间包

含如初始模型层数一样多的具有零本征值的本征矢量。若没有由于数据不足而产生的附加零本征值，则得到我们问题的广义逆的极简单的分辨矩阵。以一层中所有块体（$k=1, 2, \cdots, N$）的真实解 m_k 为例。由于非唯一性，不能确定 m_k 的均值。因为广义逆给出最小二乘方意义上的最小解，也因为均值的最小二乘方估算是算术平均，所以广义逆 $\hat{m}_k$ 可写成

$$\hat{m}_k = m_k - \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k}{N}. \tag{12.167}$$

于是可知，我们问题的广义逆解的分辨矩阵 $\boldsymbol{R}$ 具有如下的元素：

$$R_{kk} = 1 - \frac{1}{N},$$

$$R_{km} = -\frac{1}{N} \quad (\text{若块体数 } k, m \text{ 在同一层内}), \tag{12.168}$$

$$R_{km} = 0 \quad (\text{当 } k, m \text{ 在不同层内}).$$

若有足够的数据，则层间分辨是完善的。实际上，通常有几个块体，它们与另外一个或两个块体有共同的射线，并产生附加的零本征值。如 12.3.2 节中所讨论的，广义逆解是采用具有非零本征值的本征矢量构成的。

广义逆解由下式给出：

$$\hat{m} = V_p \Lambda_p^{-1} \tilde{U}_p d, \qquad (\text{即 } 12.100)$$

这表明 $\hat{m}$ 是 V_p 的列矢量，即具有非零本征值的本征矢量的线性组合。本征矢量的线性系数正比于其本征值的倒数。若某些非零本征矢量很小，数据中随机误差可由于相应本征矢量的作用而被放大。例如，引入阻尼最小二乘方解(12.128)，用以减小其本征值小于阻尼系数 ε^2 的本征矢量的作用。

了解模型空间如何与大本征值和小本征值的本征矢量相对应是有益的。让我们以 Husebye等(1976)应用中加利福尼亚台阵所

做的工作为例。他们采用了分布在 100×200 平方公里面积上 30 个左右台站记录到的约 100 次事件的到时数据。台阵的地下分为五层，每层厚度相等，为 25 公里。顶部两层分为边长为 25 公里的块体，底下三层分为边长为 30 公里的块体。

对上述数据组和模型结构，他们发现了 205 个非零本征值。图 12.21 和 12.22 分别图示了(底下三层的实际块体尺寸大些)具有最大和最小本征值的本征矢量。这两个和其余 203 个模式的线性组合构成我们的解。

与最大本征值相应的本征矢量显示了在中部地区有一个大的正异常和一个大的负异常，所有各层中异常图象大致相同。这是可根据我们的数据极可靠地确定的慢度分布图象。另一方面，与最小本征值相应的本征矢量只在邻层间异常的符号发生变化的角落上显示最大值。若要分辨邻层间该角上异常图象之差别，则需要此本征矢量。于是若压缩具有小本征值的本征矢量，则失去三维地震图象中垂直方向上的分辨率。然而，若不压缩，则随机误差的效应会引起周围地区的很大变化。为求一折衷的解，在规定阻尼常数为(12.127)所给出的合适值时，我们将运用已掌握的模型起伏变化尺度合理的知识。

由于广义逆 $\boldsymbol{m}_g$ 是极小解，因此真实起伏 $\boldsymbol{m}$ 的大小总大于 $\boldsymbol{m}_g$ 的大小：

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m} \geq \widetilde{\boldsymbol{m}}_g\boldsymbol{m}_g. \tag{12.169}$$

对广义逆 $\boldsymbol{m}_g$ 的估算 $\widetilde{\boldsymbol{m}}$ 包含了误差 $\Delta\boldsymbol{m}_g$，其协方差矩阵 $\langle\Delta\boldsymbol{m}_g\Delta\widetilde{\boldsymbol{m}}_g\rangle$ 由式(12.111)给出。这样，

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\hat{\boldsymbol{m}}}\hat{\boldsymbol{m}}\rangle &= \langle\widetilde{(\boldsymbol{m}_g+\Delta\boldsymbol{m}_g)}(\boldsymbol{m}_g+\Delta\boldsymbol{m}_g)\rangle \\ &= \langle\widetilde{\boldsymbol{m}}_g\boldsymbol{m}_g\rangle+\langle\Delta\widetilde{\boldsymbol{m}}_g\Delta\boldsymbol{m}_g\rangle \\ &= \langle\widetilde{\boldsymbol{m}}_g\boldsymbol{m}_g\rangle+\sigma_d^2 tr(\boldsymbol{V}_p\boldsymbol{\Lambda}_p^{-2}\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_p),\end{aligned}$$

式中采用了关系式 $\tilde{x}x = x\tilde{x}$ 的迹。于是可从广义逆的估算的变化和数据中的标准误差 σ_d 得到真实慢度变化 $\langle\widetilde{\boldsymbol{m}}_g\boldsymbol{m}_g\rangle$ 的下限。例如，

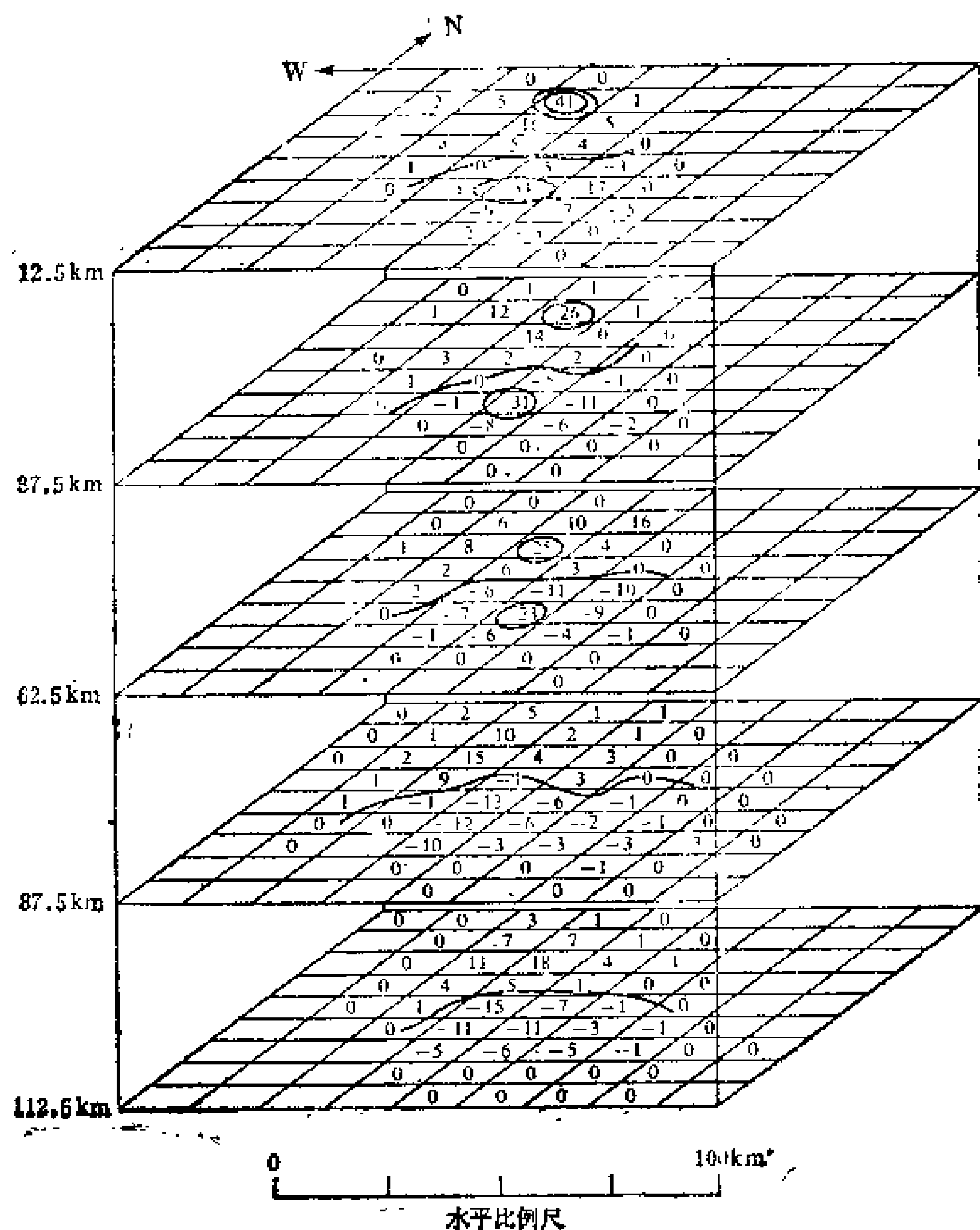


图 12.21

Husebye 等(1976)研究的中加利福尼亚的具有最大本征值的本征矢量。每片代表初始模型中位于中间深度的一层。每方块的数字目是块体的本征矢量分量，以对初始速度模型百分比表示。轮廓线之间以 20%的间隔画出(引自 Aki, 1977)

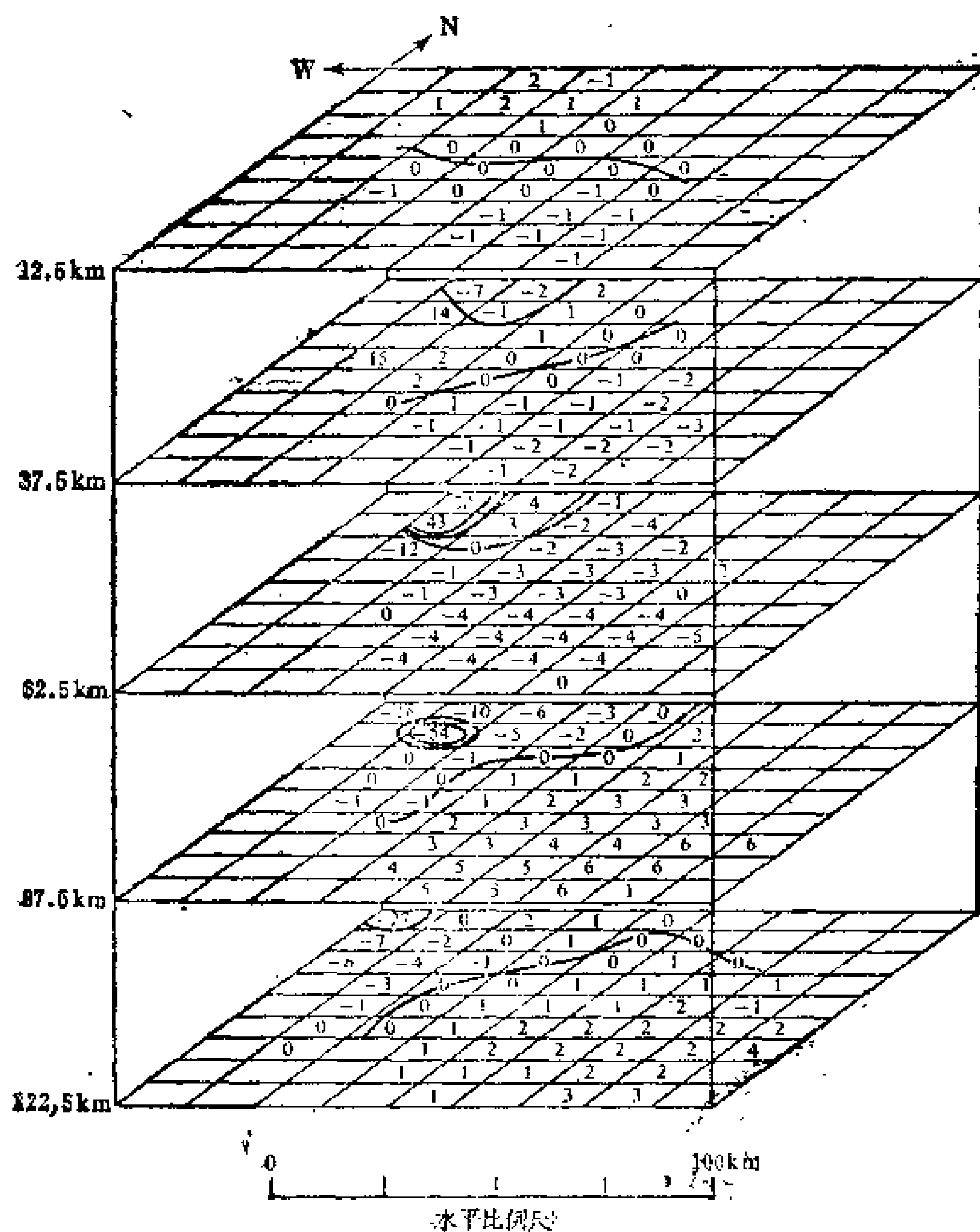


图 12.22

Husebye 等(1976)研究的中加利福尼亚的具有最小本征值的本征矢量。别的说明同于图 12.21 的图注(引自 Aki，1977)

对中加利福尼亚的$\langle \tilde{m}_g m_g \rangle$得均方根的起伏为 3.1%。

此方法已应用于世界上许多台阵，在大多数台阵之下 100 公里或更深的深度，小范围（20—50 公里）中的速度异常至少为 5%。地壳的速度异常与年轻的活动地区，如中加利福尼亚、黄石和夏威夷的地质和地球物理数据吻合得很好，而与古老、稳定的地区，如蒙大拿州东部和挪威东南部的数据吻合得很差。

此方法尚不完整，因为线性化迭代过程的循环尚未结束。必须按照我们的解修改初始模型，然后在修改后模型的基础上，建立一新的线性方程组。这就需要有在三维非均匀介质中射线追踪的有效方法。实际上，也许在多数情况下并不需要进行迭代，因为实际慢度变化可能很小

此方法可推广以便使用发生在台阵下的地方震的数据。这种情况下，虽然未知数的数目随着地震数增加了（每次事件四个未知数），但远震数据固有的非唯一性消除了。若有足够的数据，则震源参数和介质参数都可单值地确定。安艺等（Aki and Lee, 1976）根据均匀初始模型所作的初步研究表明，圣安德烈斯断层和卡拉维拉斯断层间几公里宽的低速带部分可采用密集台网记录的微震 P 到时数据求解出来。

建议进一步阅读的文献

Claerbout, J. F., and S.M. Doherty. Downward continuation of moveout corrected seismograms. *Geophysics*, **37**, 741—768, 1972.

Claerbout, J. F., and A. G. Johnson. Extrapolation of time-dependent waveforms along their path of propagation. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **26**, 285—293, 1971.

Claerbout, J. F. *Fundamentals of Geophysical Data Processing with Applications to Petroleum Prospecting*. New York: McGraw-Hill, 1976.

Colin, L.(editor), *Mathematics of Profile Inversion*. Proceedings of a workshop, NASA Technical Memorandum C-62, 150, August 1972. (Contains many reports of inverse theory as applied in seismology and other branches of physical science.)

Fadeev, L. D. Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation. *American Mathematical Society, translations*, Series 2, **53**, 139-166, 1967

Gilbert, F. Inverse problems for the earth's normal modes. *In* E. C. Robinson (editor), *The Nature of the Solid Earth*. New York: McGraw-Hill, 1972.

Gilbert, F., A. Dziewonski, and J. Brune. An informative solution to a seismological inverse problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **70**, 1410—1413, 1973.

Jordan, T. H., and J. Franklin. Optimal solutions to a linear inverse problem in geophysics. *Proceedings of the National Academy of Science*, **68**, 291—293, 1971.

Lanczos, C. *Linear Differential Operators* (Chap. 3). New York: Van Nostrand, 1961.

Minster, J. B., T. H. Jordan, P. Molnar and E. Haines. Numerical modeling of instantaneous plate tectonics. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **36**, 541—576, 1974.

Parker, R. L. The inverse problem of electrical conductivity in the mantle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **22**, 121—138, 1970.

Wiggins, R. A. Oeneral linear inverse problem—Implication of surface waves and free oscillations for earth structure. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, **10**, 251—285, 1972.

Wilkinson, J. H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon Press, 1965.

Zelen, M. Linear estimation and related topics. *In* J. Todd (editor), *A Survey of Numerical Analysis* New York:

McGraw-Hill, 1962.

问　　题

12.1　利用式（12.10），试证明当所有的射线出现在离震源点同样的距离 X_c 处时，速度分布由式 $c(z)=c_0\cosh \pi z/X_c$ 给出

12.2　当 $c(z)=c_0+gz$ 时，求证

$$X(p)=2\frac{\sqrt{1-c_0^2p^2}}{gp},$$

$$Z(p)=\frac{1}{g}(p^{-1}-c_0).$$

下面考虑(在上述介质中)有一均匀速度 c_1 的低速通道，其顶端为Z_1，底部为 $\bar{Z}_1$。试求这种情况下的 $X(p)$。把 $X(p)$ 看作观测到的，请讨论应用于 Gerver-Markushevich 法求得解的界限。

12.3　$Z(p)$ 为 p 的非递增函数这样一个限制条件给出了低速层厚度的上限。试证明，当 $dZ(p)/dp=0$ 这个条件施加于式(12.23) 并在 $p\leqslant p_1$ 处求值时，就产生了求低速层最大厚度Slichter 方程(12.16).

12.4　请考虑在 $x<0$ 时为均匀介质和 $x>0$ 时阻抗线性增加的情况。密度 $\rho(x)$和速度 $c(x)$表达式为

$$\rho(x)=c(x)=1+[(1+2x)^{1/2}-1]H(x),$$

式中 $H(x)$ 是一单位阶梯函数。这种介质的散射矩阵的元素是

$$s_{11}(\omega)=\frac{2i\omega}{2i\omega+1},$$

$$s_{12}(\omega)=\frac{-1}{2i\omega+1},$$

根据(12.60)得 $R(t)=-\frac{1}{2}e^{-t/2}H(t)$。请把 Gel'fand-

Levitan方程（12.58）应用于这种反射波$R(t)$，试导出阻抗以垂直走时为函数的表达式。

12.5 应用12.2.2节中所得的上行波和下行波的公式，试导出从地震图上消除地表层影响的两点滤波器(11.24)。

12.6 作出层状介质的合成反射地震图，并以Kochler和Taner(1977)的方式将该图与各种噪声混合起来。运用反演算法(12.54)和(12.77)，并比较其结果。

12.7 假设观测走时T依赖于距离Δ的关系为：$T \propto \sin \lambda\Delta$，$\lambda$为某个常数。若$r_0$为地球半径，则可由下式引入常数$a$和$b$：

$$T = \frac{2 r_0^{1-b}}{a(1-b)} \sin\left[(1-b)\frac{\Delta}{2}\right].$$

根据解析反演理论，推导出：和该走时曲线相关的速度剖面是$c = ar^b$。

提示：你可能需要下列结果：

$$\int_0^X \cosh^{-1}\left(\frac{\cos \lambda x}{\cos \lambda X}\right) dx = \frac{\pi}{2\lambda}\log(\sec\lambda X).$$

12.8 试用与(12.87)类似的三个未知数来确定一个线性反演问题，求$\boldsymbol{V}_0$，$\boldsymbol{V}_p$，$\boldsymbol{U}_0$和$\boldsymbol{U}_p$空间的本征值和本征矢量。用(12.100)计算广义逆，用(12.104)计算分辨矩阵，用(12.111)计算解的协方差。

12.9 对阻尼二乘方的解，分辨矩阵和协方差矩阵分别由(12.130)和(12.132)给出。令分辨矩阵和协方差矩阵的对角元素分别为R_{ii}和C_{ii}，试证明

$$C_{ii} \leqslant \frac{\sigma_d^2}{\varepsilon^2}(R_{ii} - R_{ii}^2).$$

该关系式由Ellsworth(1977)提出，且根据解的协方差给出选择ε^2的判据。

第十三章　三维非均匀介质中的地震波

除用射线理论处理一般非均匀介质中的正演问题(4.4节)以及相应的反演问题(12.3.9节)外，至此我们已经研究了弹性常数和密度仅随深度或地心距离变化的介质中体波、面波和自由振荡。随着世界标准地震台网和有着良好标定传感器的现代台阵出现(见第十一章有关地震资料改进历史的叙述)，立即显示出经典的横向均匀地球模型不能圆满地解释许多新的观测资料。

例如，在第九章中所描述的适用于长周期面波的方法，不仅不能用于像包含大陆——海洋转换带那样明显的横向不均匀的传播路径上，而且当传播距离大约接近波长的50倍时(凭经验估计)，即使整个路径都在同一海洋或大陆内也不适用。另一个例子是给定振型的自由振荡周期随台站和地震位置的不同而显著变化，这是由于横向不均匀性产生的分裂的宽度造成的。对于基频振型的环型振荡，其周期变化在角序数 l 为20至40之间是1—1.5%的量级。基频振型球型振荡其周期变化在 $20<l<50$ 时为0.5%至1%。在孔径大约为100公里的现代台阵中，人们发现远震的 P 波振幅和到时，在台阵记录上显示出强烈的起伏(振幅可差一个数量级，到时的变化可达1秒之大)，这些都是不能用横向均匀的地球模型来解释的。

当然，任何看过地质图的人都知道，地球的横向不均匀性是很强的。地震学家能够用一个横向均匀的地球模型结构对那么多的观测现象解释得那么好，的确是一件令人惊奇的事情。在我们的地球内，横向不均匀性必定较竖向不均匀性更弱一些。

处理横向不均匀性有许多方法。如果不均匀性是平滑的，且介质性质在一个波长内变化不大，那么射线理论将是最有效的。

在地球体内发生的地震散射，假使地球体的线性尺度 l 没有大到可与波长相比，那么诸如有限差分和有限元等数值方法将是有用的。

扰动法适用于弱不均匀性，它也取决于非均匀性的规模长度 a，波长 λ 以及传播距离 L 在一个包含有弱不均匀介质的一类问题中，我们发现，用未扰动介质的本征函数来构成初解是有效的。讨论光栅散射的 Rayleigh 方法已经被用来研究具有不规则内界面层状介质内的地震散射问题，一级扰动理论能够解释在大孔径地震台阵上观测到的周期大于 1 秒的远震 P 波相位和振幅的起伏

当非均匀地球体积的线性尺度 L 大到与波长 λ 和非均匀规模长度 a 可相比较时，问题变得更加复杂，在本章中，我们将借助于 L，λ 和 a 更加明确地模述这个问题。L/λ 和 L/a 越大，确切地处理这个问题就越困难，而统计方法也许可用来找出地球的一些平均特性。

本章将描述射线理论、扰动理论、数值方法和统计方法，它们在解释地震观测资料中都是有用的。

13.1 非均匀介质中的射线跟踪

在第四章中，我们研究了在一般非均匀各向同性介质内波阵面附近的运动，并利用一个形式为(4.36)的试探解：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{U}[t-T(\mathbf{x})]f(\mathbf{x}). \tag{13.1}$$

把这个初解代入运动方程，可辨认出系数矩阵 $\ddot{U}_{*}f$ 必定是奇异的，从而导出了程函方程(4.41)

$$(\nabla T)^2=\frac{1}{c^2}=n^2, \tag{13.2}$$

式中 c 或是局部 P 波速度，$\sqrt{[\lambda(\mathbf{x})+2\mu(\mathbf{x})]/\rho(\mathbf{x})}=\alpha$，或是局部 S 波速度，$\sqrt{\mu(\mathbf{x})/\rho(\mathbf{x})}=\beta$，而 n 是相应的慢度。在光学中，n 是折射率，当真空时，$n=1$。

量 T 起两个作用。第一，方程 $T=T(\mathbf{x})$随着 T 保持恒定是一个关于在特定时间上波阵面位置的隐式方程。随着这个"恒定"值的增加，波阵面运动(传播)到一个新的位置。另一方面，射线在空间上是固定的。我们目前的兴趣是在给定 $n=n(\mathbf{x})$的介质中，对一个给定源来寻找这些射线的位置。T 的第二个作用是可以利用方程$\mathbf{x}=\mathbf{x}(T)$，此方程是以 T 为变量的射线的显式方程，这里 T 意味着从某些特殊参考点(通常是震源)发出的射线走时。

根据射线定义(仅在各向同性介质中有效)，它垂直于波阵面，可推断出

$$\mathbf{s}=\nabla T \tag{13.3}$$

是一个沿射线方向的矢量。很自然称 $\mathbf{s}$ 为慢度矢量，显然$|\mathbf{s}|=n$(见 13.2)。根据(4.42)—(4.47)，把 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(T)$用作射线方程。

$$\mathbf{s}=n^2\frac{d\mathbf{x}}{dT}\text{和 }n\frac{d}{dT}\left[n^2\frac{d\mathbf{x}}{dT}\right]=\nabla n. \tag{13.4}$$

把它们写为

$$\frac{dx_i}{dT}=\frac{1}{n^2}s_i,\quad \frac{ds_i}{dT}=\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x_i}, \tag{13.5}$$

我们已经导出了一组关于 s_i 和 x_i 的一阶常微分方程，它们可以用标准的数值方法求解。到目前为止，我们利用的是直角坐标，它对于震源距离小于 100 公里左右的问题是方便的。但对全球性的问题，需要用球面几何学。

考虑一球坐标(r, θ, ϕ)，定义 r, θ, ϕ 方向上的单位矢量分别为$\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$，如图 13.1 所示。用角 i 和 ζ 定义一条射线路径

的方向，i 为射线方向和 $\hat{r}$ 间的夹角；ζ 是 $\hat{\theta}$ 和射线路径在 $\theta\phi$ 平面上投影的夹角。则(13.4)的第一个方程就变换成：

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{dT} &= \frac{1}{n}\cos i, \\
r\frac{d\theta}{dT} &= \frac{1}{n}\sin i\cos\zeta, \qquad (13.6)\\
r\sin\theta\frac{d\phi}{dT} &= \frac{1}{n}\sin i\sin\zeta.
\end{aligned}
$$

$d\mathbf{s}/dT = n^{-1}\nabla_n$ 的变换不那么简单，因为当沿射线移动时，球坐标系是旋转的。我们必须利用球坐标的参数，给出在固定坐

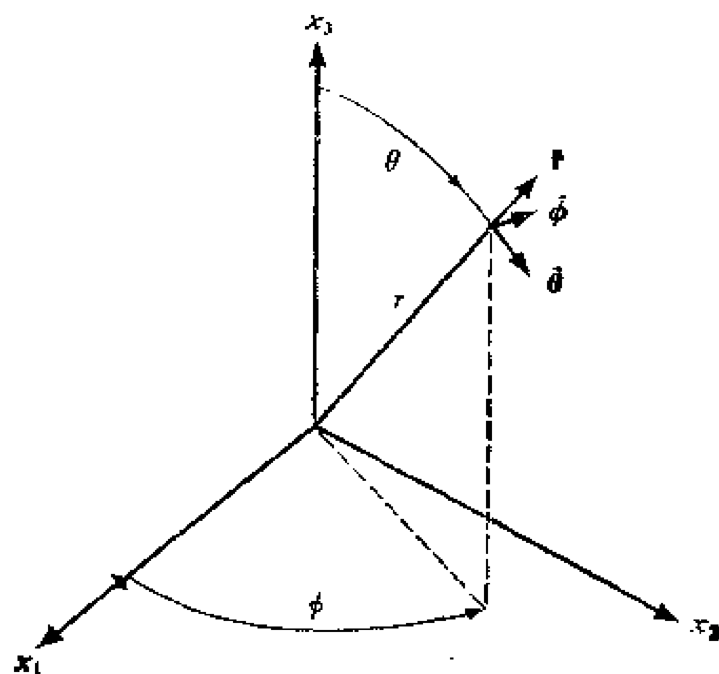


图 13.1

球坐标中(r，θ，ϕ)方向上的正交单位向量($\hat{r}$，$\hat{\theta}$，$\hat{\phi}$)

标系中(例如 x_1，x_2，x_3)结果的公式。在(x_1，x_2，x_3)和(r，θ，ϕ)坐标系内，$\mathbf{s}$ 分量间的关系为

$$
\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_r \\ s_\theta \\ s_\phi \end{pmatrix}. \qquad (13.7)
$$

应用上述 $\boldsymbol{s}$ 和 ∇n 两者的变换，例如对 x_3 分量可得到下述方程：

$$
\begin{aligned}
\frac{ds_3}{dT}=&\frac{dn}{dT}(\cos i\cos\theta-\sin i\cos\zeta\sin\theta)\\
&+n(-\sin i\cos\theta-\cos i\cos\zeta\sin\theta)\frac{di}{dT}\\
&+n(-\cos i\sin\theta-\sin i\cos\zeta\cos\theta)\frac{d\theta}{dT}\\
&+n\sin i\sin\zeta\sin\theta\frac{d\zeta}{dT}\\
=&\frac{1}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial n}{\partial\theta}\sin\theta\right).
\end{aligned}
$$

由这个方程和那些关于 x_1 和 x_2 分量的方程、并利用(13.6)消去 dr/dT，$d\theta/dT$，$d\phi/dT$，得

$$
\begin{aligned}
\frac{di}{dT}=&-\sin i\left(\frac{1}{nr}+\frac{1}{n^2}\frac{\partial n}{\partial r}\right)\\
&+\frac{\cos i}{r}\left(\cos\zeta\frac{1}{n^2}\frac{\partial n}{\partial\theta}+\frac{\sin\zeta}{\sin\theta}\frac{1}{n^2}\frac{\partial n}{\partial\phi}\right), \qquad (13.8)\\
\frac{d\zeta}{dT}=&-\frac{\sin\zeta}{r\sin i}\frac{1}{n^2}\frac{\partial n}{\partial\theta}\\
&+\frac{\cos\zeta}{\sin i}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{1}{n^2}\frac{\partial n}{\partial\phi}-\frac{1}{nr}\sin i\sin\zeta\cot\theta.
\end{aligned}
$$

上述方程首先是由 Julian(1970)得出的，它一直用于确定三维构造的影响，也用于三维构造内的震源定位问题。图 13.2 给出的例子是在中大西洋洋脊和在阿留申岛弧内地震射线跟踪结果。

沿一个球面传播的面波射线跟踪方程可作为体波射线跟踪方程的特例来得到。令 r 为常数 R 并使 $i=\frac{\pi}{2}$，以使射线总是位于以 R 为半径的球面上。那么方程(13.6)和(13.8)可简化为

$$
\frac{d\theta}{dT}=\frac{1}{nR}\cos\zeta,
$$

$$\frac{d\phi}{dT}=\frac{1}{nR\sin\theta}\sin\zeta, \tag{13.9}$$

$$\frac{d\zeta}{dT}=-\frac{\sin\zeta}{n^2R}\frac{\partial n}{\partial\theta}+\frac{\cos\zeta}{n^2R\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\phi}-\frac{1}{nR}\sin\zeta\cot\theta.$$

方程(13.9)给出了在球面上已知慢度分布 $n(\theta, \phi)$的射线路径。

当出发点和初始方向为已知时，用方程(13.6)和(13.8)计算射线路径是简单明了的。在给定开始点和终止点的情况下，问题就变得复杂起来。基本上有两种方法来求解这个问题。一种称之为"打靶法"，利用适合于初始方向的试探值，并加以修正以使所计算的路径像所要求的那样以最近的路径到达给定的终点。另一种方法是利用具有正确始末点的试探射线路径，然后调整路径以满足射线轨迹的微分方程。第一种方法不需要做进一步的解释，现在来对第二种方法，有时称之为"弯曲法"加以说明。

为了简单起见，我们将使用直角坐标系并规定射线 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\sigma)$，式中 σ 由

$$\frac{dx_i}{d\sigma}=\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{13.10}$$

所定义。为此，选择自变量，使射线方程(见 4.46)变成

$$\frac{d^2x_i}{d\sigma^2}=n\frac{\partial n}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\frac{\partial n^2}{\partial x_i}. \tag{13.11}$$

令 $x_i^{(0)}(\sigma)$是初始试探路径，它开始于点 x_i^s 而以点 x_i^e为终点，σ 的相应值是零和 σ_e，因此

$$x_i^{(0)}(0)=x_i^s \quad 及 \quad x_i^{(0)}(\sigma_e)=x_i^e \qquad (i=1,2,3). \tag{13.12}$$

从(13.10)和(13.2)得到$|d\mathbf{x}|=nd\sigma$，所以沿试探路径的 σ 值为：

$$\sigma=\int_0^{x_1^{(0)}}\frac{1}{n}\left[1+\left(\frac{dx_2^{(0)}}{dx_1^{(0)}}\right)^2+\left(\frac{dx_3^{(0)}}{dx_1^{(0)}}\right)^2\right]^{1/2}dx_1^{(0)}. \tag{13.13}$$

现在对试探路径增加一改正项 $\delta x_i(\sigma)$，以使其和满足方程(13.11)：

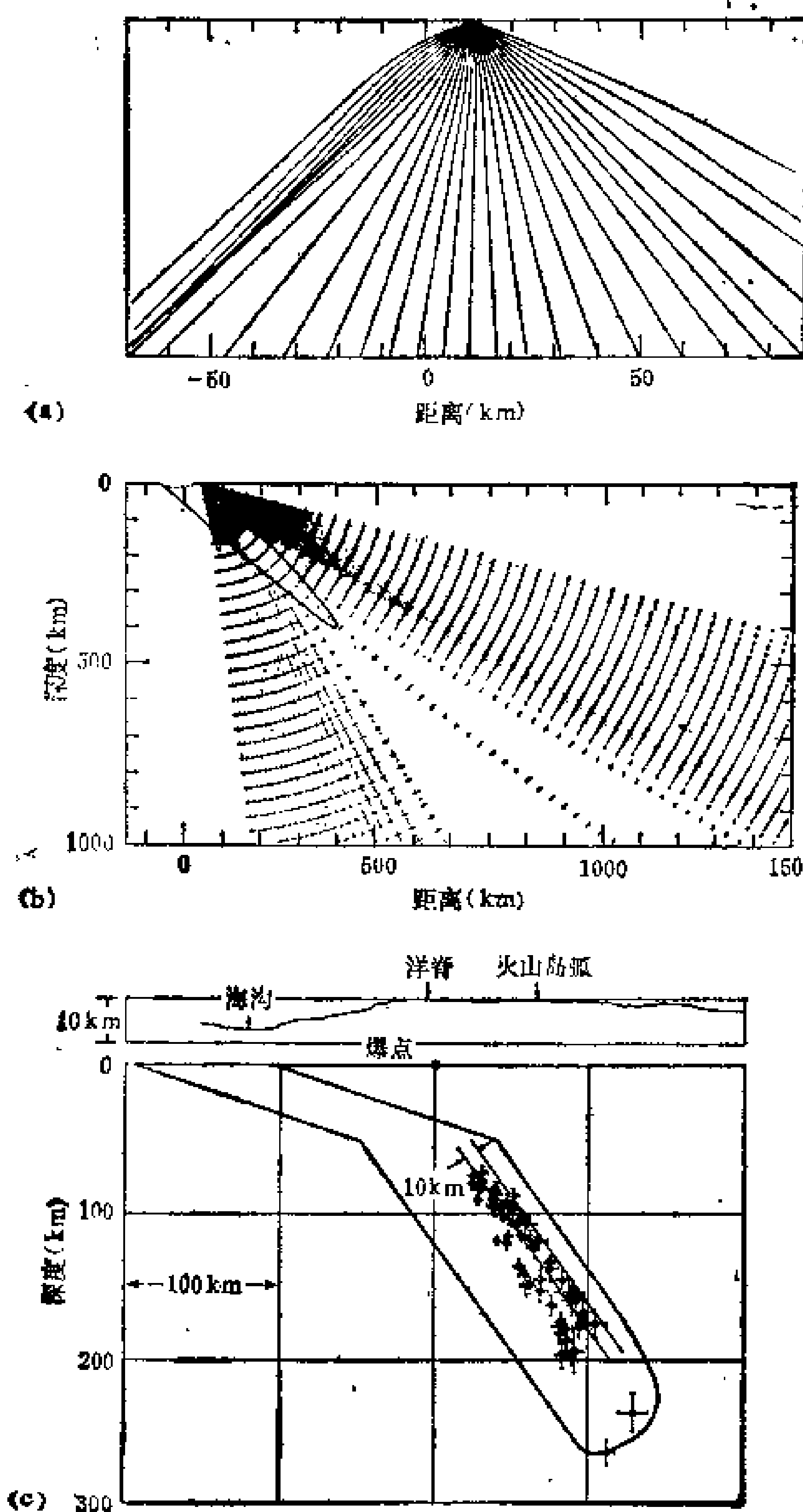


图 13.2

横向变化构造对射线影响的例子。(a) 在距中洋脊模型的轴10公里远处表面地震产生的射线路径[引自Solomon和Julian, 1974]。(b) 在倾角为45°的高速俯冲板块内，靠近顶部边缘附近地震所产生的进入均匀半空间的地震射线路径。一般来讲，非均匀介质内的射线不在一个垂直平面内。但对于像(a)和(b)情况下的二维构造，如图所示的那样，射线是沿垂直于洋脊与板块走向传播的，刚好位于一个垂直平面内(引自Toksöz et al., 1971)。(c) 中阿留申群岛地震震源的重新定位。震源已投影到穿过延伸到250公里深处高速俯冲板块上的一个垂直剖面上。假定地球模型为球对称的，空心圈为地震位置，实圈表示在横向不均匀情况下这些震源的再定位情况(假定板块速度比周围同样深度介质的速度高7%)。震源位置大约位移30公里左右，重新定位的震源构成在板块上部边缘附近一个窄的活动带(引自Engdahl, 1973)

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}\left[x_i^{(0)}+\delta x_i\right]=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial n^2}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_i^{(0)}+\delta x_i} \quad (i=1,2,3). \quad (13.14)$$

将右边在x_i^0点附近展成δx_i的 Taylor 级数，并忽略掉高阶小项，得到一个关于δx_i的线性微分方程：

$$\frac{d^2\delta x_i}{d\sigma^2}-\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 n^2}{\partial x_j\partial x_i}\right|_{x_i=x_i^{(0)}}\delta x_j=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial n^2}{\partial x_i}\right|_{x_i=x_i^{(0)}}-\frac{d^2x_i^{(0)}}{d\sigma^2}$$

$$(i=1,2,3). \quad (13.15)$$

δx_j的系数与方程右边是对初始途径来取值的。对于边界条件为$\delta x_i(0)=\delta x_i(\sigma_e)=0$的方程可很容易地用有限差分方法求解。然后以修正后的路径作为第二个试探路径。此过程可迭代下去直到它收敛于一个最终解。这种方法是由 Wesson (1971) 提出的，Julian 和 Gubbins(1977)发现它较前面的打靶方法能更快地求出源与接收点之间的走时。

Yang 与 Lee(1976)把二阶射线方程(13.11)简化为一组一阶方程，然后利用由 Lentini 和 Pereyra(1977)提出的有限差分程序来求解它们，这样既改进了精度又较早先的方法节省计算时间。

在本节中所述的射线跟踪是对平滑变化的介质而言。有关倾斜内界面的影响，已由Langston(1977)用射线理论，Hong 和Helmberger (1977) 利用广义射线理论进行过讨论，这个题目将在13.4.2 节内讨论。

13.2　弱非均匀介质中的弹性波

在前节讨论射线跟踪中，我们把注意力放在波阵面到时上。现在让我们来考虑整个地震图，并认为它由两部分组成：即由原生波与散射波组成。假定原生波是已知的，若介质是均匀的，则完整的地震图由原生波构成。散射波是由原生波和非均匀介质相互作用而产生的。我们称均匀和非均匀的介质为“受扰的”和“不

受扰的”介质.

在本节中，不受扰介质是均匀、各向同性的无界体，并认为平面 P 波和 S 波是原生波. 我们假定非均匀性较弱，因此散射波遵循不受扰介质的波动方程，其有源项由非均匀性和原生波的相互作用而确定. 和一个特殊散射源等价的体力是容易获得的. 正如在本章引言中所讨论的那样，散射波所载功率将明确地由包含在任何散射现象中的三个重要长度来给定，它们为：非均匀区域的线性尺度 L，非均匀性规模长度 a 和波长。最后，我们将考虑由散射波引起的振幅和相位起伏，特别是那些在大孔径地震台阵上远震 P 波的观测资料。

现在我们从一般非均匀、各向同性的弹性体内位移 $\mathbf{u}$ 的运动方程出发：

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u})_{,i} + [\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j}. \tag{13.16}$$

用 ρ_0，λ_0和 μ_0表示未受扰的均匀介质，则受扰介质的上述参数表示为

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho, \\ \lambda &= \lambda_0 + \delta\lambda, \\ \mu &= \mu_0 + \delta\mu. \end{aligned} \tag{13.17}$$

$\delta\rho$，$\delta\lambda$，$\delta\mu$ 是空间的函数，但其大小假定比相应的未受扰介质的小得多.

把（13.17）代入（13.16），将非受扰项与受扰项分别整理在等式两边，则得到

$$\rho_0 \ddot{u}_i - (\lambda_0 + \mu_0)(\nabla \cdot \mathbf{u})_{,i} - \mu_0 \nabla^2 u_i = -\delta\rho \ddot{u}_i + (\delta\lambda + \delta\mu)(\nabla \cdot \mathbf{u})_{,i} + \delta\mu \nabla^2 u_i + (\delta\lambda)_{,i} \nabla \cdot \mathbf{u} + (\delta\mu)_{,j}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{13.18}$$

现在把解 $\mathbf{u}$ 写为“原生波” $\mathbf{u}^0$和“散射波”$\mathbf{u}^1$之和：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^1. \tag{13.19}$$

正如前述的定义那样，$\mathbf{u}^0$是在非受扰介质内的一个解且满足下列方程：

$$\rho_0 \ddot{u}_i^0 - (\lambda_0 + \mu_0)(\nabla \cdot \mathbf{u}^0)_{,i} - \mu_0 \nabla^2 u_i^0 = 0. \tag{13.20}$$

将(13.19)代入(13.18)，并从(13.18)减去(13.20)，假设$|u_i^1|\ll|u_i^0|$，略去二次及更高次项，得下述u^1的方程：

$$\rho_0\ddot{u}_i^1-(\lambda_0+\mu_0)(\nabla\cdot u^1)_{,i}-\mu_0\nabla^2u_i^1=Q_i \tag{13.21}$$

式中

$$Q_i=-\delta\rho\ddot{u}_i^0+(\delta\lambda+\delta\mu)(\nabla\cdot u^0)_{,i}+\delta\mu\nabla^2u_i^0$$
$$+(\delta\lambda)_{,i}(\nabla\cdot u^0)+(\delta\mu)_{,j}[u_{i,j}^0+u_{j,i}^0]. \tag{13.22}$$

因此，(13.21)正是在一个均匀、无界、各向同性弹性介质内、具有体力Q的运动方程(4.1)。让我们来求出对于原生平面P波和S波两种情况下，相应于$\delta\rho$，$\delta\lambda$，$\delta\mu$，$(\delta\lambda)_{,i}$与$(\delta\mu)_{,i}$的体力。

13.2.1 原生平面P波

取x_1方向为原生平面P波的传播方向，我们有：

$$u_i^0=\delta_{1i}\exp[-i\omega(t-x_1/\alpha_0)], \tag{13.23}$$

式中$\alpha_0=\sqrt{(\lambda_0+2\mu_0)/\rho_0}$是在非受扰介质中$P$波速度。把(13.23)代入(13.22)，得出相应的体力分量为

$$Q_1=\left[\delta\rho\omega^2-\frac{(\delta\lambda+2\delta\mu)\omega^2}{\alpha_0^2}+i\frac{\omega}{\alpha_0}(\delta\lambda)_{,1}\right.$$
$$\left.+2i\frac{\omega}{\alpha_0}(\delta\mu)_{,1}\right]\exp[-i\omega(t-x_1/\alpha_0)],$$
$$Q_2=i\frac{\omega}{\alpha_0}(\delta\lambda)_{,2}\exp[-i\omega(t-x_1/\alpha_0)], \tag{13.24}$$
$$Q_3=i\frac{\omega}{\alpha_0}(\delta\lambda)_{,3}\exp[-i\omega(t-x_1/\alpha_0)].$$

把Q_1的方程右边头两项合併作为P波速度的扰动量，于是有

$$\delta\rho\omega^2-\frac{(\delta\lambda+2\delta\mu)\omega^2}{\alpha_0^2}=-\omega^2\rho_0\left(-\frac{\delta\rho}{\rho_0}+\frac{\delta\lambda+2\delta\mu}{\lambda_0+2\mu_0}\right)$$
$$=-2\omega^2\rho_0\frac{\delta\alpha}{\alpha_0}. \tag{13.25}$$

这一项仅在x_1方向上存在，并在x_1方向上起一个单力作用，我们称此项为“速度扰动”，后面将详细描述由于这项引起的散射

波 这种源的小单元所产生散射的远场P波和S波，如图 13.3 的最上图所示。

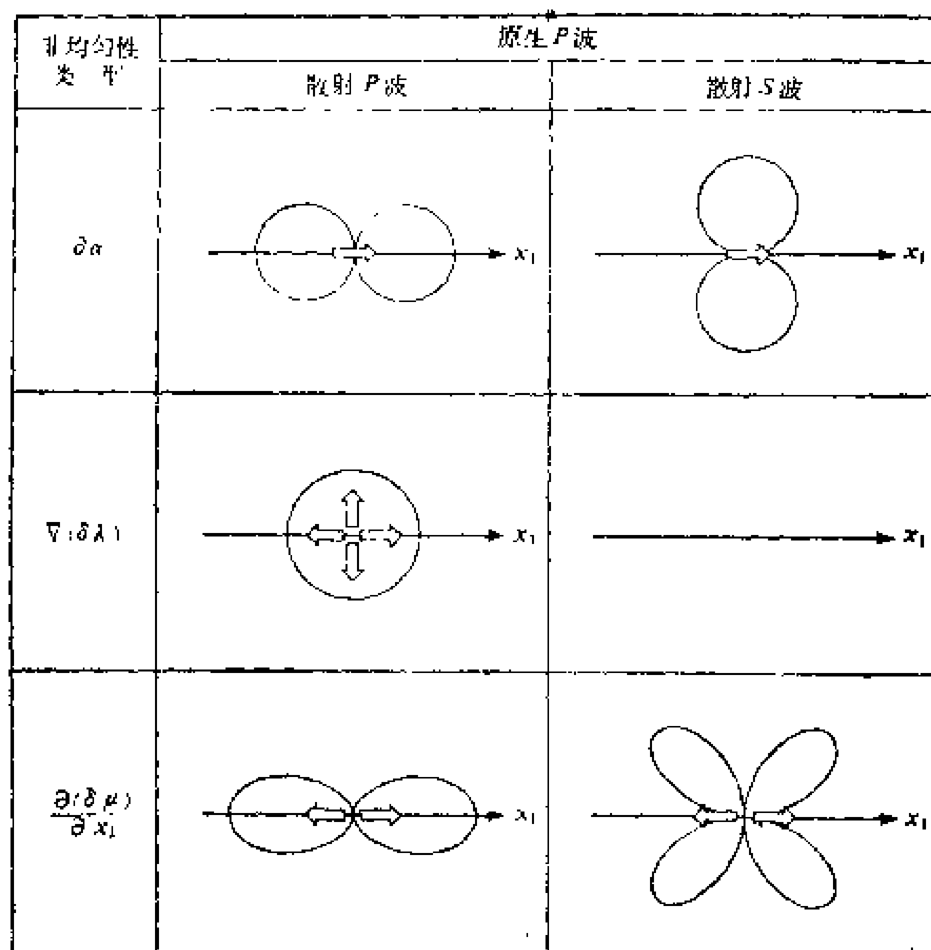


图 13.3

当P波沿x_1方向入射时，由三种局部的非均匀性散射的远场P波和S波辐射图案

此外，如果$\delta\lambda$局限在小区域V之内，而在其外为零，$\nabla(\delta\lambda)$项的作用相当于三个相互垂直的偶极子。在那种情况下，由于

$$\int_V x_i \frac{\partial(\delta\lambda)}{\partial x_k} dV = -\delta_{ik}\int_V \delta\lambda dV,$$

矩张量是对角矩阵，对角元素相等并且与$-\int_V \delta\lambda dV$成正比。

这样，这个震源的一个单元将在各个方向产生均匀的P波，但却没有S波，如图13.3的中图所示。

与$(\delta\mu)_{,1}$有关的最后一项相当于图3.7中的偶极子(1，1)，假定$\delta\mu$限定在小区域V内，而在V外为零。矩张量将仅有一个M_{11}元素，它与$\int_V \delta\mu dV$成正比。由这种源的一个单元所辐射出的P波和S波图案在图13.3的底部给出。

注意，在原生波传播方向上并无由于原生P波引起的远场散射S波。

13.2.2 原生平面S波

对于质点在x_2方向上运动而沿x_1方向传播的原生平面S波可写为：

$$u_i^0 = \delta_{2i}\exp[-i\omega(t-x_1/\beta_0)], \tag{13.26}$$

式中$\beta_0=\sqrt{\mu_0/\rho_0}$是非受扰介质内的$S$波速度。将（13.26）代入（13.22）中，得到的体力分量形式如下：

$$Q_1 = i\frac{\omega}{\beta_0}(\delta\mu)_{,2}\exp[-i\omega(t-x_1/\beta_0)],$$

$$Q_2 = \left[\delta\rho\omega^2-\delta\mu\frac{\omega^2}{\beta^2}+i\frac{\omega}{\beta_0}(\delta\mu)_{,1}\right]\exp[-i\omega(t-x_1/\beta_0)], \tag{13.27}$$

$$Q_3 = 0.$$

对于Q_2的方程同样可将头两项合併为“速度扰动”项

$$\delta\rho\omega^2-\delta\mu\frac{\omega^2}{\beta^2} = -2\,\omega^2\rho_0\frac{\delta\beta}{\beta_0}. \tag{13.28}$$

这种非均匀性与x_2方向上（原生波质点运动方向）的一个单力相对应。

λ的非均匀性并不与S波相互作用，且不存在包含$\delta\lambda$或$\nabla\delta\lambda$的散射源。

另外，如果$\delta\mu$位于小区域V内而在其外为零，则$\delta\mu$的空间导数项相当于一个双力偶。矩张量将有非零元素$M_{12}=M_{21}$，且

与 $\int_V \delta\mu dV$ 成正比。

在原生平面 S 波的情况下散射的远场 P 波和 S 波的辐射图案如图 13.4 所示。注意，这里在原生波传播方向上不存在起因于原生 S 波的散射 P 波。

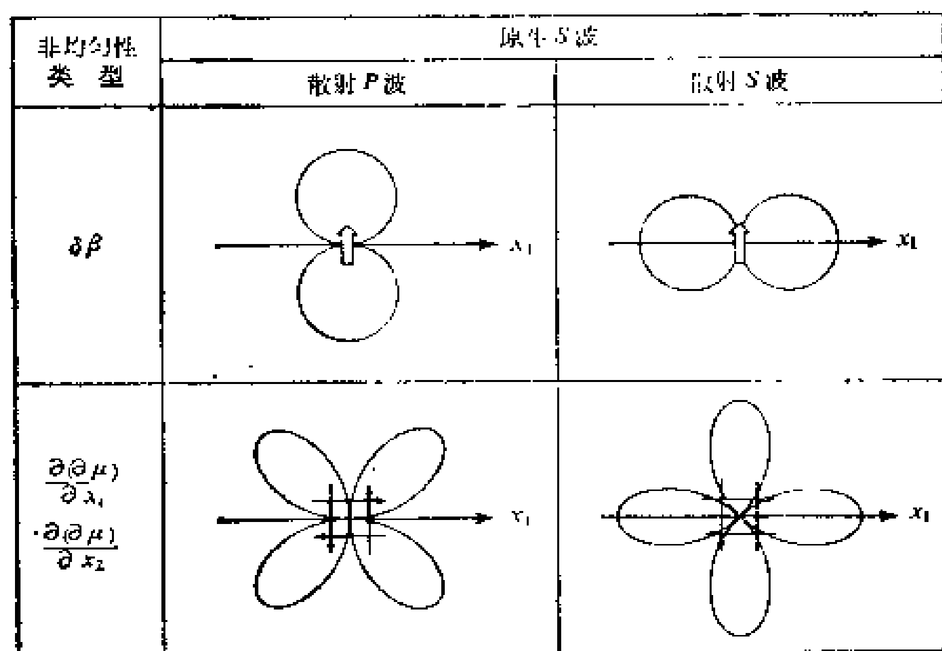


图 13.4

当平面 S 波沿 x_1 方向入射时，由两种局部非均匀性散射出的远场 P 波和 S 波辐射图案

13.2.3 散射波的解

现在我们已经有了一个很好的思路：体力 $\mathbf{Q}$ 的意义在于产生散射波，因而可以求出 (13.21) 的解。方程 (13.21) 可重新写为一个矢量方程，

$$\rho_0\ddot{\mathbf{u}}^1-(\lambda_0+2\mu_0)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}^1)+\mu_0\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}^1)=\mathbf{Q},$$

取此方程的散度和旋度，得到一对非均匀波动方程，其解由滞后势 (4.6) 给出。波动方程为

$$\nabla\cdot\ddot{\mathbf{u}}^1-\alpha_0^2\nabla^2(\nabla\cdot\mathbf{u}^1)=\nabla\cdot\mathbf{Q}/\rho_0 \qquad (13.29)$$

和

$$\nabla \times \ddot{\mathbf{u}}^1 - \beta_0^2 \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}^1) = \nabla \times \mathbf{Q}/\rho_0, \tag{13.30}$$

它们的解是

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^1(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\alpha_0^2\rho_0}\int_V \frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\nabla\cdot\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}{\alpha_0}\right) \times dV(\zeta) \tag{13.31}$$

和

$$\nabla \times \mathbf{u}^1(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\beta_0^2\rho_0}\int_V \frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}\nabla\times\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}{\beta_0}\right) dV(\boldsymbol{\xi}), \tag{13.32}$$

式中 V 是 $\mathbf{Q}$ 不为零的非均匀区域，

为了检查上述公式的适用范围，考虑一个已知解的简单情况．假定平面 P 波垂直入射在一个厚度为常数 d 和均匀速度扰动为 $\delta\alpha$ 的无限平板上（图 13.5）。可以预见到，通过平板后总的波（原生波加散射波）将显示出有时间滞后

$$\frac{d}{\alpha_0+\delta\alpha}-\frac{d}{\alpha_0}\sim-\frac{\delta\alpha d}{\alpha_0^2},$$

它与无平板时的原生波有关。

因为在平板的一面由于 $\delta\lambda$ 和 $\delta\mu$ 的梯度而产生的体力当量与另一面的符号相反，所以它们的效应在前进方向上近于抵消，因而在目前问题中可以忽略掉。其次，对原生波 $u_i^0=\delta_{1i}\times\exp[-i\omega(t-x_1/\alpha_0)]$，从 (13.24) 和 (13.25)，得到

$$\nabla\cdot\mathbf{Q}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-2\,\omega^2\rho_0\frac{\delta\alpha}{\alpha_0}\exp[-i\omega(t-x_1/\alpha_0)]\right]$$

$$\sim -2\,\omega^2\rho_0\frac{\delta\alpha}{\alpha_0}\,i\,\frac{\omega}{\alpha_0}\exp[-i\omega(t-x_1/\alpha_0)], \tag{13.33}$$

式中再次忽略了包含有速度扰动的梯度项。把 (13.33) 代入 (13.31)，得到散射波的散度为

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^1(\mathbf{x},t)\sim\frac{-1}{4\pi\alpha_0^2}\int_V\frac{1}{r}2\,\omega^2\frac{\delta\alpha}{\alpha_0}\,i\,\frac{\omega}{\alpha_0}$$

$$\times \exp\left[-i\omega\left(t-\frac{r}{a_0}-\frac{\xi_1}{a_0}\right)\right]dV(\xi). \qquad (13.34)$$

利用由图 13.5 内定义的变量，注意到

$R^2=r^2-(x_1-\xi_1)^2$，由此 $dV(\xi)=2\pi RdRd\xi_1=2\pi rdrd\xi_1$.

于是

$$\nabla\cdot \mathbf{u}^1(\mathbf{x},\ t)\sim\frac{1}{a_0^2}\int_0^d\int_{x_1-\xi_1}^{\infty}\omega^2 i\frac{\delta a\cdot\omega}{a_0^2}\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{r}{a_0}-\frac{\xi_1}{a_0}\right)\right]drd\xi_1$$

$$=-i\frac{\omega^3}{a_0^2}\frac{\delta a}{a_0^2}\int_0^d\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{\xi_1}{a_0}\right)\right]d\xi_1$$

$$\int_{x_1-\xi_1}^{\infty}\exp(i\omega r/a_0)dr.$$

因为在 $r\to\infty$ 处的贡献可以忽略（a_0^{-1} 有一小的正虚部），

$$\int_{x_1-\xi_1}^{\infty}e^{i\omega r/a_0}dr=-\frac{a_0}{i\omega}\exp\left[i\omega\frac{(x_1-\xi_1)}{a_0}\right].$$

则有

$$\nabla\cdot \mathbf{u}^1(\mathbf{x},t)=\omega^2\frac{\delta a}{a_0^3}d\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x_1}{a_0}\right)\right]. \qquad (13.35)$$

原生波的散度是

$$\nabla\cdot \mathbf{u}^0(\mathbf{x},t)=i\frac{\omega}{a_0}\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x_1}{a_0}\right)\right].$$

所以总的波的散度为

$$\nabla\cdot(\mathbf{u}^1+\mathbf{u}^0)=i\frac{\omega}{a_0}\left[1-i\omega\frac{\delta a d}{a_0^2}\right]\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x_1}{a_0}\right)\right]$$

$$\sim i\frac{\omega}{a_0}\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x_1}{a_0}+\frac{\delta a\cdot d}{a_0^2}\right)\right], \qquad (13.36)$$

恰如所料，它揭示出厚度为 d 且均匀速度扰动为 δa 的一个无限平板引起了

$$-\frac{\delta a d}{a_0^2}$$

的时间滞后

上述问题的精确解是容易获得的，且透射波的散度由下式给出：

$$\nabla\cdot u=\frac{i\omega}{\alpha_0}\,\frac{4\,\alpha_0\rho_0\alpha_1\rho_1\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x_1}{\alpha_0}-\frac{d}{\alpha_0}\right)\right]}{\alpha_0(\alpha_0\rho_0+\alpha_1\rho_1)^2e^{-i\omega d/\alpha_1}-(\alpha_0\rho_0-\alpha_1\rho_1)^2e^{i\omega d/\alpha_1}},$$

式中 α_1 与 ρ_1 分别为速度和板的密度。如果忽略阻抗差 $\alpha_0\rho_0-\alpha_1\rho_1$ 与速度差的二次项，则上述精确解可化为 (13.36)。这样对一阶参数扰动来讲，透射波的相位受平板影响，而振幅却不受影响。

13.3 由于速度扰动引起的散射

正如前节所示，具有恒定速度扰动的无限平板（厚度有限）对垂直入射的平面波产生一个相位滞后的变化，但不影响其前进方向上的振幅。现在我们着手处理在各个方向上速度随有限长度而变化的情况，只考虑标量波 Φ（例如 $\nabla\cdot u$）。为了简单起见，依然不考虑介质参数空间梯度的影响，而集中考虑只有速度扰动的影响。假使非均匀性在一个波长内是平滑的，那么完全可以这么做。在此种情况下，原生波形式为

$$\Phi^0=A\exp[-i\omega(t-x_1/c_0)],\tag{13.37}$$

散射波由下式给出（见 (13.34)）：

$$\Phi^1(x,t)=\frac{A\omega^2}{2\pi c_0^2}\int_V\left(-\frac{\delta c}{c_0}\right)\frac{\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{r}{c_0}-\frac{\xi_1}{c_0}\right)\right]}{r}dV(\xi),\tag{13.38}$$

式中 c 是波速，可以是 α 或 β，V 是 $\delta c\neq0$ 的非均匀区域，而 $r=|x-\xi|$。

为了清楚地定义非均匀介质的长度，考虑任意介质并用其自相关函数描述慢度的空间变化 $-\delta c/c_0$。令

$$\mu = -\delta c/c_0, \tag{13.39}$$

我们假定 μ 的变化是各向同性的，且在空间内是平稳的，则可用下式定义归一化自相关函数：

$$N(\mathbf{r}) = \frac{\langle \mu(\mathbf{r}')\mu(\mathbf{r}'+\mathbf{r})\rangle}{\langle \mu^2\rangle}. \tag{13.40}$$

根据 Chernov(1960)，我们考虑 $N(r)=e^{-|r|/a}$ 和 $N(r)=e^{-|r|^2/a^2}$ 的情形，式中 a 是非均匀介质长度的范围，称之为相关距离。

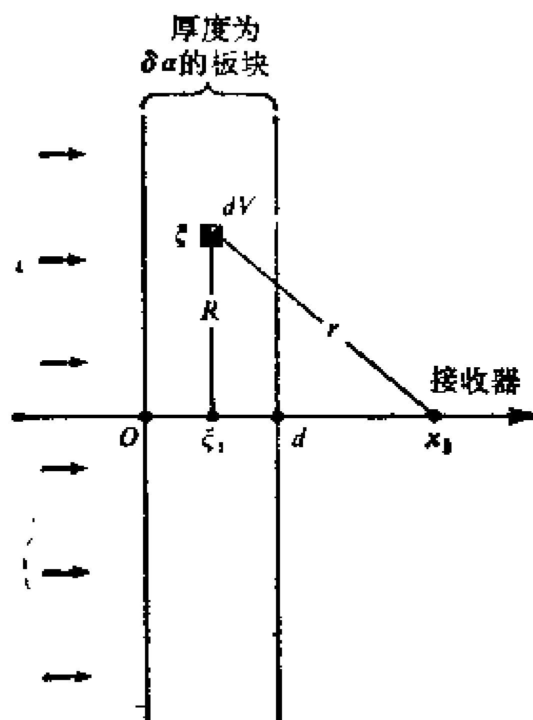


图 13.5
平面 P 波入射在一个具有均匀速度扰动 δa 的平板上

补充 13.1

介质非均匀性的统计模型

如果 $\mu(r)$ 是一个时间的随机函数，如温度变化时空气的密度，很容易理解相关函数 $\langle\mu(r_1)\mu(r_2)\rangle$。在那种情况下，可对许多统计独立

的时间样品取平均算子〈 〉，但在固体地球内，$\mu(\boldsymbol{r}_1)$ 至少在地震实验时间范围内是一个固定的空间函数。那么，当变量在空间上实际上是固定的时候，如何定义一个统计平均呢？

为了回答这一问题，想一下有关从一个地区采集岩石样品进行密度测量问题。因为密度随样品不同而变化，可以构制一个密度的分布函数$f(\rho)$，即在 $\left(\rho-\frac{1}{2}\Delta\rho,\ \rho+\frac{1}{2}\Delta\rho\right)$ 范围内所求的密度的概率是 $f(\rho)\Delta\rho$。从这一分布函数里，我们可得到在这个地区岩石密度的平均值、它们的方差等。这些统计特性给出了在那个地区内关于岩石密度的有用资料。由于我们选择的样品是从一些并不麻烦的特殊位置得到的，所以岩石样品的密度变成了一个统计变量。我们的兴趣仅在于对那个地区的岩石密度做一个粗略的描述。

同样的论据可以应用到缓慢变化的$\mu(\boldsymbol{r})$。假定$\mu(\boldsymbol{r})$的变化在所考虑的体积内有稳定的统计特性，那么可以把相关函数定义为在独立样品点 $\boldsymbol{r}_1$ 上的 $\mu(\boldsymbol{r}_1)\mu(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r})$的平均。这个函数将描绘出$\mu(\boldsymbol{r})$变化的大小和平滑性，它可以用来估计从震源体内散射出来的波的能量或者是观测波振幅与到时变化的统计特性。

13.3.1 散射波的功率谱

让我们首先研究离开线性尺度为L体积为V的非均匀区域很远处所观测到的散射波，如图 13.6 所示。为了求出（13.38）中的积分值，我们将利用一个与有限震测（14.11）远场项计算相同的近似公式，即：

$$r=(|\mathbf{x}|^2+|\boldsymbol{\xi}|^2-2\,\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi})^{1/2}$$
$$\sim|\mathbf{x}|-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi} \tag{13.41}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是 $\mathbf{x}$ 方向上的单位矢量。如果 $kL^2/2|\mathbf{x}|\ll\pi/2$，这一近似式是成立的。把（13.41）代入（13.38）中的被积函数的指数中，且用 $1/|\mathbf{x}|$代替 $1/r$，得到：

$$\Phi^1(\mathbf{x},t)=\frac{Ak^2\exp[-i(\omega t-k|\mathbf{x}|)]}{2\pi|\mathbf{x}|}\int_V\mu(\boldsymbol{\xi})\exp[ik(\xi_1$$
$$-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi})]dV(\boldsymbol{\xi}), \tag{13.42}$$

式中令 $k=\omega/c_0$。

现在让我们估计一下散射波所载的功率。因为$|\Phi^1|^2$ 等于Φ^1与其复共轭之积，所以

$$|\Phi^1|^2=\frac{A^2k^4}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|^2}\int_V\int_V\mu(\xi')\mu(\xi)$$
$$\times\exp\{ik[\xi_1-\xi_1'-\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}')]\}dV(\xi)dV(\xi').$$

(13.43)

将 ξ_1 方向上的单位矢量表示为 $\mathbf{e}_1$，定义$\mathbf{K}=\mathbf{e}_1-\mathbf{n}$。从图 13.7 很容易看出$|\mathbf{K}^2|=1+1-2\cos\theta=4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$，因而$|\mathbf{K}|=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$，

利用(13.40)取(13.43)的统计平均，得到

$$\langle|\Phi^1|^2\rangle=\frac{A^2k^4\langle\mu^2\rangle}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|^2}\int_V\int_V N(\xi-\xi')$$
$$\times\exp[ik\mathbf{K}\cdot(\xi-\xi')]dV(\xi)dV(\xi').$$

(13.44)

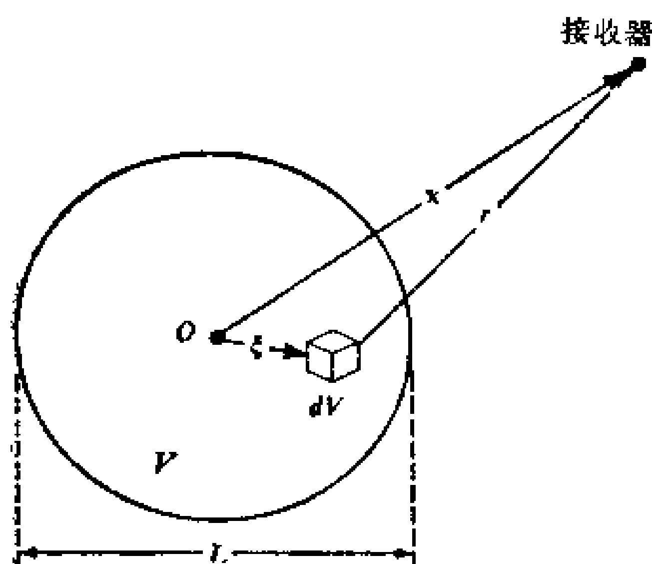


图 13.6

在非均匀体V内位于距原点O为ξ处的一个体元$dV(\xi)$。体元与台站间的距离为$r=|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|$

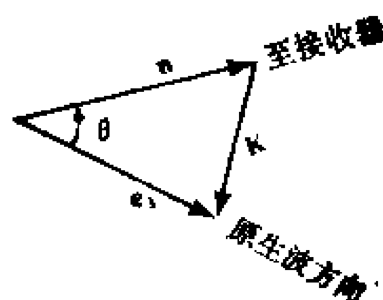


图 13.7

指向接收点方向上的单位矢量$\mathbf{n}$与原生波传播方向上的单位矢量$\mathbf{e}_1$间的关系

这是在介质[由 $N(\xi-\xi')$ 所描述，见补充 13.1]非均匀性的统计特性和散射波的统计特性之间我们获得的第一个关系式。为了理解 $\langle|\Phi^1|^2\rangle$ 中符号 $\langle\ \rangle$，设想体积 V 内可放置许多不同的速度扰动 μ，每一个扰动有相同的自相关 N。对每一个样品的扰动，可以写出一个像(13.43)那这的确定表达式。但事实上我们并不详细知道 $\mu(\xi')\mu(\xi)$；我们仅仅知道平均值 $\langle\mu(\xi')\mu(\xi)\rangle=N(\xi-\xi')\langle\mu^2\rangle$。这样 $\langle|\Phi^1|^2\rangle$ 指的是在我们所设想的试验中对每一个速度扰动由(13.43)所确定出的 $|\Phi^1|^2$ 的平均值。

地球内散射波的专门观测是像(13.43)那样的某种确定积分的测量，因为地球会对被积函数内造成起伏的值产生影响。只把在地球上观测到的 $|\Phi^1|^2$ 与我们所提出的 $\langle|\Phi^1|^2\rangle$ 理论进行比较是没有多少用处的，但如果有许多散射波的观测，则我们的假定将是：观测的统计特性将由统计平均 $\langle|\Phi^1|^2\rangle$ 的特性来解释。

为了求出上述积分(13.44)的值，我们把变量 ξ 和 ξ' 改为相对坐标 $\hat{\xi}=\xi-\xi'$，并利用质心坐标 $\bar{\xi}=(\xi+\xi')/2$。因为被积函数不是 $\bar{\xi}$ 的函数，且 $\int_V d\bar{\xi}_1\,d\bar{\xi}_2\,d\bar{\xi}_3=V$，所以有

$$\langle|\Phi^1|^2\rangle=\frac{A^2k^4\langle\mu^2\rangle V}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|^2}\int_V N(\hat{\xi})\exp(ik\mathbf{K}\cdot\hat{\xi})\,d\hat{\xi}_1\,d\hat{\xi}_2\,d\hat{\xi}_3. \tag{13.45}$$

把 $(\hat{\xi}_1,\ \hat{\xi}_2,\ \hat{\xi}_3)$ 变换到球坐标 $(r',\ \theta',\ \phi')$，以 $\mathbf{K}$ 为极轴，得出

$$r'=|\hat{\xi}|,$$
$$\mathbf{K}\cdot\hat{\xi}=|\mathbf{K}|r'\cos\theta'$$
$$d\hat{\xi}_1\,d\hat{\xi}_2\,d\hat{\xi}_3=r'^2\,dr'\sin\theta'\,d\theta'\,d\phi'.$$

因而有

$$\int_V N(\hat{\xi})\exp(ik\mathbf{K}\hat{\xi})\,d\hat{\xi}_1 d\hat{\xi}_2\,d\hat{\xi}_3$$
$$=\int_V N(r')\exp(ik|\mathbf{K}|\cdot r'\cos\theta')r'^2\,dr'$$

$$\times \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi'$$

$$= 4\pi \int_0^\infty N(r') \frac{\sin(k|\mathbf{K}|r')}{k|\mathbf{K}|} r' \, dr'. \tag{13.46}$$

式中把 r' 的积分限扩大到无穷，假定相关距离 a 比 V 的线性范围小得多

上述积分在 $N(r)=e^{-r/a}$ 和 $N(r)=e^{-r^2/a^2}$ 情况下可积，并得到一个简洁形式 把结果代入(13.45)，得到

$$\langle|\Phi^1|^2\rangle = \frac{2A^2k^4\langle\mu^2\rangle a^3 V}{\pi|\mathbf{x}|^2} \times \frac{1}{\left(1+4k^2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}, \quad 当\ N(r)=e^{-r/a} \tag{13.47}$$

和

$$\langle|\Phi^1|^2\rangle = \frac{A^2k^4\langle\mu^2\rangle a^3 V}{4\sqrt{\pi}|\mathbf{x}|^2} \times \exp\left(-k^2a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \quad 当\ N(r)=e^{-r^2/a^2}. \tag{13.48}$$

虽然这里我们运用了 Chernov(1960)给出的推导，但公式(13.47)首先是 Pekeris(1947)得到的。

在每一种情况下，散射波功率在 $ka \ll 1$ 时与 k^4 成正比。这就是众所周知的 Rayleigh 散射。如果 ka 较小，散射功率与 θ 无关。这样具有比一个波长小的速度扰动就会产生一个各向同性的散射。然而当 ka 小时，在目前分析中忽略掉的速度和弹性扰动的梯度就变得重要了，而且它们的影响是定向的，如同在 13.3.3 中所描述的那样。

另一方面，当 ka 很大时，由于速度扰动引起的散射变成直接向前，且散射功率集中在围绕原生波传播方向($\theta=0$)上$(ka)^{-1}$

角内、反向散射功率($\theta \to \pi$)，尤其是在 $N(r)=e^{-r^2/a^2}$ 的情况下，变得非常小。

13.3.2 通过边长为 L 的非均匀立方体时原生波的能量损失

在通过一个边长为 L 的立方体表面时，原生波(13.45)所载能流正比于 $L^2|\Phi_0|^2$。取 γ 为比例常数，能流 I 由下式给出：

$$I=\gamma L^2|\Phi_0|^2. \tag{13.49}$$

散射波所载走的总能流可按下式计算：

$$\Delta I=\gamma\int_S\langle|\Phi^1|^2\rangle dS, \tag{13.50}$$

式中 S 是以 R 为半径在远距离上包围非均匀立方体的球表面。利用图 13.7 所定义的角 θ，面元 dS 可写为

$$\begin{aligned} dS &= 2\pi R^2\sin\theta\, d\theta \\ &= 2\pi R^2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta \\ &= 2\pi R^2|\mathbf{K}|\cos\frac{\theta}{2}d\theta. \end{aligned} \tag{13.51}$$

将(13.45)，(13.46)与(13.51)代入(13.50)，得

$$\Delta I=\gamma\, 2L^3A^2k^2\langle\mu^2\rangle\int_0^\infty N(r')[1-\cos 2kr']dr'. \tag{13.52}$$

对于 $N(r)=e^{-r/a}$，上述公式给出了部分能量损失为

$$\frac{\Delta I}{I}=\frac{8\langle\mu^2\rangle k^4a^3L}{1+4k^2a^2}, \tag{13.53}$$

而对于 $N(r)=e^{-r^2/a^2}$，为

$$\frac{\Delta I}{I}=\sqrt{\pi}\langle\mu^2\rangle k^2 aL(1-e^{-k^2a^2}).$$

$$(13.54)$$

在推导散射公式(13.47)与(13.48)时，我们假定了原生波Φ^0通过非均匀区域时没有变化 这个工作主要是由Max Born首创的，上述假定称为Born近似。它违反能量守恒定律，因为散射能量带有由方程(13.53)和(13.54)所给出的部分原生波能量。因此，我们的散射公式仅适用于$\Delta I/I$非常小的情况。其条件能够简化为(例如对$N(r)=e^{-r/a}$的情况)

$$2\langle\mu^2\rangle k^2 aL\ll 1,\qquad \text{当 } ka\gg 1$$

和

$$8\langle\mu^2\rangle k^4 a^3 L\ll 1,\qquad \text{当 } ka\ll 1.$$

$$(13.55)$$

13.3.3 速度和弹性常数梯度的作用

对于小ka，上面导出的散射公式也许是不适用的，因为我们在推导散射波积分表达式(13.38)时忽略了速度和弹性常数空间梯度的影响。若要保留(13.33)中速度扰动的空间梯度项，那么(13.38)必须由下式所代替：

$$\Phi^1(x,t)=\frac{A\omega^2}{2\pi c_0^2}\int_V\left[-\frac{\delta c}{c_0}+\frac{ic_0}{\omega}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\delta c}{c_0}\right)\right]\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{r}{c_0}-\frac{\xi_1}{c_0}\right)\right]\frac{1}{r}dV(\xi).$$

$$(13.56)$$

取Φ^1与其复共轭之积平均数，$\langle|\Phi^1|^2\rangle$能够表示成形式为(13.45)的积分，其中

$$\left\langle\mu(\boldsymbol{\xi}')\frac{\partial\mu(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_1}\right\rangle=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\langle\mu(\boldsymbol{\xi}')\mu(\boldsymbol{\xi})\rangle=\langle\mu^2\rangle\frac{\partial N(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{\partial\hat{\xi}_1},$$

且出现

$$\left\langle\frac{\partial\mu(\boldsymbol{\xi}')}{\partial\xi_1'}\frac{\partial\mu(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_1}\right\rangle=\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\xi_1'}\langle\mu(\boldsymbol{\xi}')\mu(\boldsymbol{\xi})\rangle=-\langle\mu^2\rangle\frac{\partial^2 N(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{\partial\hat{\xi}_1^2}.$$

被积函数内的这些项很容易利用分部积分方法求出，假定$N(\hat{\xi})$和它的导数在非均匀区域V的表面上为零，而V的尺度大到可与相关距离a相比。注意$\mathbf{K}$的ξ_1分量k_1等于$2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$，所获得的结果是在(13.45)上简单地乘上一个$\cos^2\theta$因子，即：

$$\langle|\Phi^1|^2\rangle=\frac{A^2k^4\langle\mu^2\rangle\cos^2\theta\cdot V}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|^2}\int_V N(\hat{\xi})\exp[ikK\cdot\hat{\xi}]\times d\hat{\xi}_1\,d\hat{\xi}_2\,d\hat{\xi}_3. \tag{13.57}$$

这个结果可以由图13.3和13.4中所示的等效体力推断出来，因为两者中都有P到P和S到S散射，局部速度非均匀性的作用象一个单力，而它们的振幅辐射花样是由$\cos\theta$描绘出的。可以预期，对于包括$\nabla(\delta\lambda)$和$\nabla(\delta\mu)$影响可以有同样的简单关系。事实上，Haddon已经计算了P波到P波的散射，得到结果为

$$\langle|\Phi^1|^2\rangle=\frac{A^2k^4V}{(2\pi)^2|\mathbf{x}|^2}\left(\frac{\gamma_\lambda}{2}-\frac{\gamma_\rho\cos\theta}{2}+\frac{\gamma_\mu\cos^2\theta}{2}\right)^2\times\int_V N(\hat{\xi})\times\exp[ik\mathbf{K}\cdot\hat{\xi}]\,d\hat{\xi}_1\,d\hat{\xi}_2\,d\hat{\xi}_3, \tag{13.58}$$

式中假定扰动$\delta\rho$，$\delta\mu$和$\delta\lambda$有同样的空间分布函数$H(\xi)$，以及归一化的空间自相关函数$N(\hat{\xi})$：

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0}=\gamma_\rho H(\xi),$$

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_0+2\mu_0}=\gamma_\lambda H(\xi),$$

$$\frac{2\delta\mu}{\lambda_0+2\mu_0}=\gamma_\mu H(\xi),$$

$$N(\hat{\xi})=\langle H(\xi)H(\xi+\hat{\xi})\rangle. \tag{13.59}$$

(13.58)中所表明的θ与$\delta\lambda$无关，$\cos^2\theta$与$\delta\mu$相关，与图13.3所示各向同性源与偶极子源是一致的。

当 ka 很大时，可以不考虑速度与弹性常数的空间梯度项在这种情况下，散射公式(13.47)与(13.48)表明除了小 θ 情况外 $\langle|\Phi^1|^2\rangle$ 变得非常小，且散射能量集中在前进方向上。对于小的 θ 值，$\cos\theta\sim1$，且

$$-\frac{\delta\rho}{\rho_0}+\frac{\delta\lambda}{\lambda_0+2\mu_0}+\frac{2\,\delta\mu}{\lambda_0+2\mu_0}=2\frac{\delta\alpha}{\alpha_0},$$

我们发现(13.58)与忽略掉梯度作用得到的方程(13.45)是一致的。

Haddon 和 Cleary(1974)用方程(13.58)把 $PKIKP$ 的前驱波解释为来自核-幔界面附近的横向不均匀而造成的散射波。观测到的前驱波振幅被解释为非均匀区域的厚度 $L=200$ 公里，非均匀性长度 $a=30$ 公里，且其密度、体积模量和刚度的均方根起伏为 1%。(如在第二卷引言中提到的，许多这样的前驱波在早些时已被用液态核内的过渡区来解释，这相当于 PKP 走时曲线上一个新分枝——GH 分枝)

用随机介质描述地球内部特征也类似地应用到表面附近的构造。然而，在这种情况下，观测点是紧靠着散射源的，且散射波与原生波一起到达。因此，为了找出非均匀性的性质，必须研究由于散射波影响原生波所引起的观测振幅和相位起伏。

13.3.4 由地震台阵观测到的振幅和相位的起伏

我们来考虑非均匀区域处于 $x_1>0$，而平面原生波沿 $+x_1$ 方向传播的情况。假设 ka 足够大，以致可以忽略掉速度和弹性常数梯度的作用，以及忽略掉 P 到 S 和 S 到 P 的转换。我们回顾一下(13.37)与(13.38)，并将原生波与散射波的和写为

$$\Phi=\Phi^0+\Phi^1=A\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x_1}{c_0}\right)\right]$$

$$+\frac{A\omega^2}{2\pi c_0^2}\int_V\left(-\frac{\delta c}{c_0}\right)\frac{\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{r}{c_0}-\frac{\xi_1}{c_0}\right)\right]}{r}$$

$\times dV(\xi)$.

$$(13.60)$$

令

$$\Phi=(A+\Delta A)\exp\left[\ i\omega\left(t-\frac{x_1}{c_0}\right)-i\Delta\phi\right], \tag{13.61}$$

可得到振幅和位相的起伏。取(13.60)和(13.61)的实部与虚部，当 $\Delta A/A\ll 1$ 及 $\Delta\phi\ll 1$ 时，可发现

$$\Delta\phi=\frac{k^2}{2\pi}\int_V\frac{1}{r}\sin k[r-(x_1-\xi_1)]\mu(\xi)dV(\xi), \tag{13.62}$$

$$\frac{\Delta A}{A}=\Delta\ln A=\frac{k^2}{2\pi}\int_V\frac{1}{r}\cos k[r-(x_1-\xi_1)]\mu(\xi)dV(\xi),$$

式中 $k=\omega/c$。而 $\mu(\xi)=-\delta c/c_0$

在大规模不均匀($ka\gg 1$)情况下，可以忽略掉反向散射，且只需考虑来自 $\rho<x_1-\xi_1$ 区域内体元 $dV(\xi)$ 的贡献(见图 13.8)。则

$$\begin{aligned}r&=\sqrt{\rho^2+(x_1-\xi_1)^2}\\&\sim(x_1-\xi_1)+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{x_1-\xi_1},\end{aligned} \tag{13.63}$$

它用一个抛物面近似球波阵面。利用(13.63)代替(13.62)内的 $r-(x_1-\xi_1)$，并用 $1/(x_1-\xi_1)$ 替换 $1/r$，得

$$\begin{aligned}\Delta\phi&=\frac{k^2}{2\pi}\int_V\frac{\sin[k\rho^2/2(x_1-\xi_1)]}{x_1-\xi_1}\mu(\xi)dV(\xi),\\ \Delta\ln A&=\frac{k^2}{2\pi}\int_V\frac{\cos[k\rho^2/2(x_1-\xi_1)]}{x_1-\xi_1}\mu(\xi)dV(\xi),\end{aligned} \tag{13.64}$$

式中积分区 V 是 $\xi_1=0$ 与 $\xi_1=x_1$ 之间的一层。作为 ρ 的函数，这些被积函数的部分形状已在图 13.9 中表示出来。

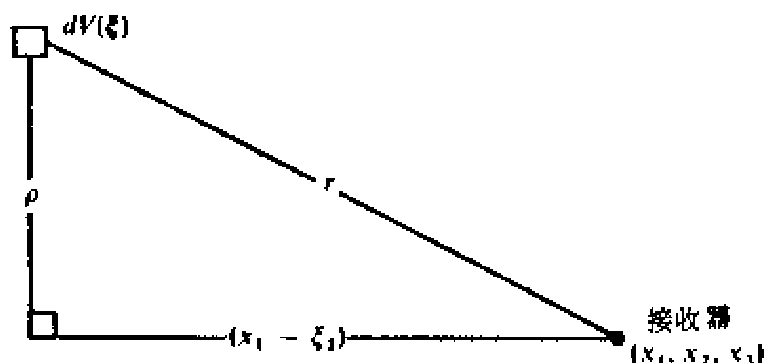


图 13.8

利用(13.64)，能估计出$|\Delta\phi|^2$和$|\Delta \ln A|^2$的平均值．所用方法基本上与在(13.47)和(13.48)内获得$\langle|\Phi^1|^2\rangle$的方法相同。假定通过非均匀区域的传播距离L比相关距离a大得多，Chernov(1960)对$N(r)=e^{-r^2/a^2}$情况得到了下述公式：

$$\langle|\Delta\phi|^2\rangle=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\langle\mu^2\rangle k^2 aL\left(1+\frac{1}{D}\tan^{-1}D\right),$$

$$\langle|\Delta \ln A|^2\rangle=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\langle\mu^2\rangle k^2 aL\left(1-\frac{1}{D}\tan^{-1}D\right),$$

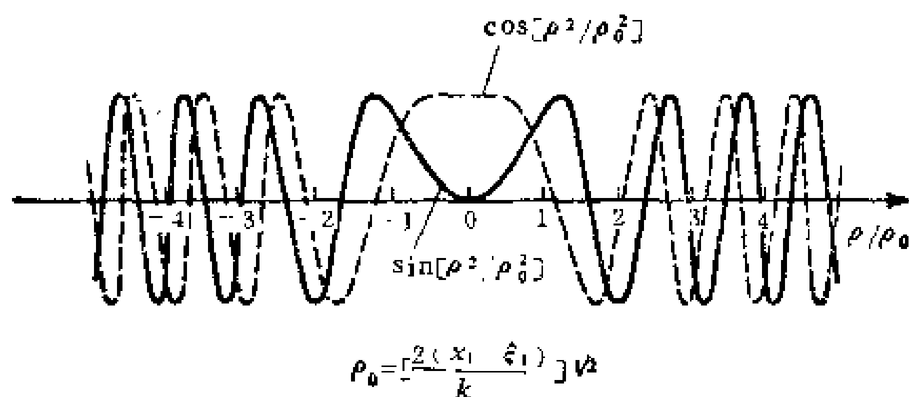
$$(13.65)$$

式中D称为波参数，由下式定义：

$$D=\frac{4L}{ka^2}. \tag{13.66}$$

这就是第一 Fresnel 带的大小与非均匀规模大小的比率。当D很小时，振幅起伏比相位起伏小．前面讨论过均匀速度扰动的无限平板情况相当于$D=0$，其相位起伏符合几何射线光学，而振幅起伏如同在(13.65)中那样是零．当$D=0$时，相位起伏最大，它随着D的增加而减少，当D接近无穷时，其起伏变得与振幅起伏相同．

Chernov(1960)给出了$N(r)=e^{-r^2/a^2}$情况下$\Delta \ln A$和$\Delta\phi$



$\rho_0 = [\frac{2(x_1 - \xi_1)}{k}]^{1/2}$

图 13.9

之间的相关系数：

$$\frac{\langle \Delta \ln A \cdot \Delta\phi \rangle}{[\langle(\Delta \ln A)^2\rangle\langle(\Delta\phi)^2\rangle]^{1/2}} = \frac{1}{2} \frac{\log(1+D^2)}{2[D^2-(\tan^{-1}D)^2]^{1/2}} \cdot \tag{13.67}$$

$D=\infty$时，相关性不存在，但D为有限值时，相关性总是正值，当D值小时它趋近$\frac{1}{2}\sqrt{3/2}$（约 0.6）。Chernov 还计算了振幅与相位起伏的空间自相关函数。将这些理论结果与由安艺（Aki，1973)和 Capon（1974）在蒙大拿大孔径地震台阵获得的远震P波观测做了比较。图 13.10 表示了从典型远震所得到P波的 $\Delta\ln A$-$\Delta\varphi$ 图。在每个台站上与第一个到时拟合最好的平面波被认为是原生波，$\Delta\phi$ 是针对最佳拟合的平面波到时测量的。频率在 0.5 到 0.7 赫范围内观测的和计算的方差及相关函数很一致。在大孔径地震台阵下发现的非均匀介质，相关距离大约有 10 公里，分数均方根速度起伏大约为 3—4%。并延伸到深度 60—100 公里的深度。对于这样的频率范围，ka 大约为 6，满足大 ka 的假定。而对于 0.5 赫，在(13.54)中给出的小扰动的条件，勉强满足 $\Delta I/I<1$。但是，对于频率高于 0.7 赫，条件显然被破坏了。1 赫波的观测统计特性表明，它们与小扰动假定下所推断的那些条件显示出系统的偏差。

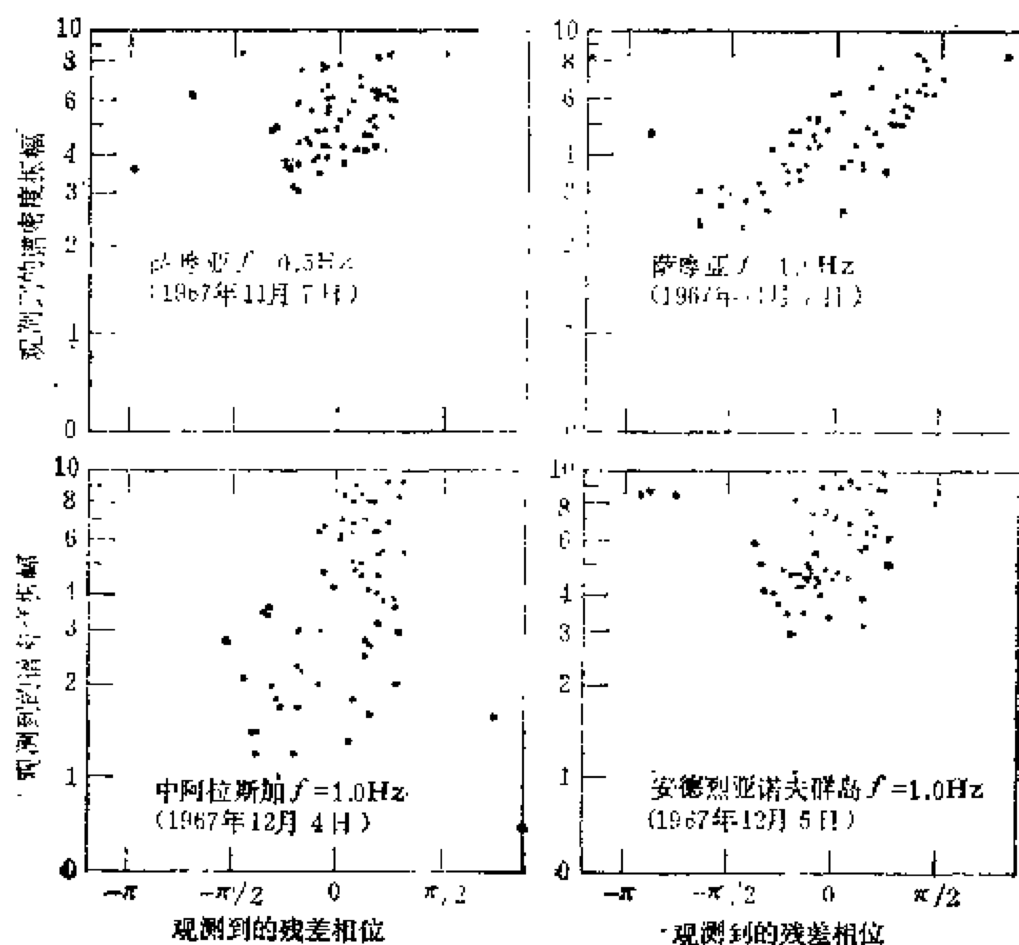


图 13.10

大孔径地震台阵上观测到的四个地震的 P 波振幅与相位变化间的关系（相位变化是对于用最小二乘方法拟合初至的指定平面波阵面到时来测量的）。它们表现出正相关性，与 Chernov 理论相一致（引自 Aki，1973）

13.3.5 散射问题的分类

为了正确地认识地震学所碰到的散射问题，我们将根据两个控制散射现象的最重要的无量纲数，即 ka 与 kL，来给它们分类。ka 是非均匀规模长度 a 与波长 λ 之比再乘以 2π，它量度在一个波长内非均匀性的平滑还是粗糙。kL 是原生波通过一个非均匀区域波数的 2π 倍。

对于距震源很近的强震记录，原生波传播距离可能是一个波

长的零头。另一方面，短周期地震仪记录的典型远震P波，其传播距离可能是波长的1000倍。因此，地震学中kL变化范围很大，可达1至10^4。

最大的不均匀长度具有地球周长的量级，如同在大陆和海洋分布中所表现的那样。最小的不均匀可以是晶体颗粒的大小或是岩石中微破裂的长度。这样，在地震学中的ka几乎可以取任意值。但对非常大或非常小的ka，散射的影响可以忽略。为了更清楚地看到这一点，我们将利用在(13.66)定义的波参数D和在(13.55)给出的散射造成的部分能量损失$\Delta I/I$。

如同以前所讨论的，当D小时，振幅起伏小而相位起伏很接近几何射线理论所推断的大小。换言之，非均匀介质的变化是那样的平滑以致可将它视为分段均匀的。这种方法已广泛地运用于地震学的不同领域，例如，在解释面波相速度与群速度时，可将地球表面划分成几个区域，假定在每个区域内地壳-地幔构造是横向均匀的，那么观测走时可认为是各个地域内走时之和。在解释远震体波和折射、反射记录中已经做了同样的处理。这种"射线理论"逼近在过去是最富有成效的。在ka-kL图内满足这种逼近的区域是$D<1$，如图13.11中$D=1$线的左上边。因此，此图的左上角，其内$a>L$，从定义知属于均匀地区，该地区内射线理论是有效的，它是一个在$a=L$与$D=1$之间的楔形区。

此外，当非均匀大小比波长小得多时，散射可以忽略不计。因为在这种情况下，介质特性像是具有一定平均性质的均匀体，正如不同晶体的聚集体在宏观上表现出像是一个均匀物体一样。

散射的强度可以由部分损失$\Delta I/I$来估计。若$\Delta I/I$小的话(比如小于10%)，就可以忽略散射且认为介质是均匀的。图13.11有两条来自(13.55)的线：

$$\frac{\Delta I}{I}=8\langle\mu^2\rangle k^4a^3L=0.1 \quad 当\ ka<1,$$

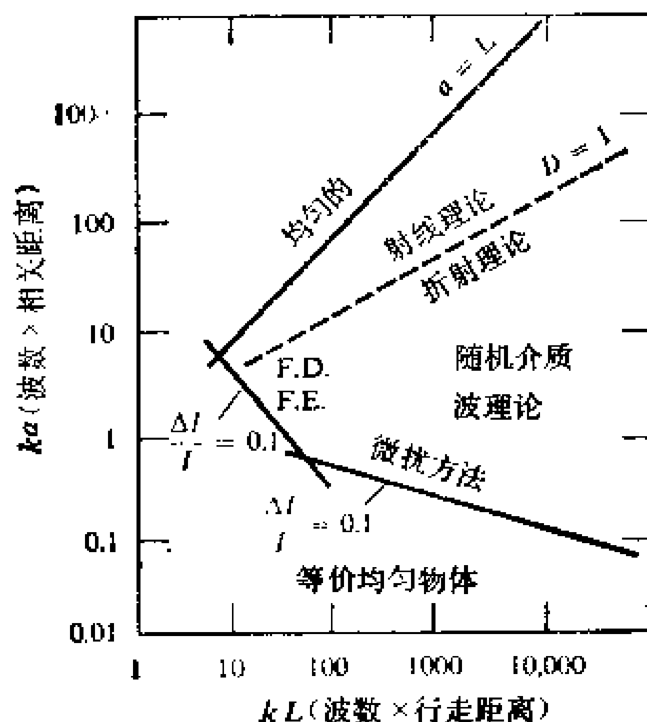


图 13.11

散射问题的分类和在 ka-kL 图内能应用的方法，其中 k 是波数，a 为非均匀性的相关距离，而 L 是传播距离

$$\frac{\Delta I}{I}=2\langle\mu^2\rangle k^2 aL=0.1 \quad 当\ ka>1,$$

式中假定$\langle\mu^2\rangle=0.001$，这是一个$\sqrt{10\%}$的均方根速度扰动。这两条线之下，介质可以视为均匀的。在两条线附近，散射是弱的，小扰动法也许可用。在这些线之上，且在 $D=1$ 之下，是强散射区域。当我们移到强散射区的左角时，问题就简化了。有限差分法、有限元法和其它数值方法也许就是求解这个拐角内问题的行之有效的方法。

补充 13.2

总体均匀介质

当非均匀尺度比起波长足够小时，可以忽略散射的影响，然后再用一个等效均匀介质代替非均匀介质。等效均匀介质的弹性常数被称

之为"有效模量"。在地震学中，已对两相介质的有效模量予以特别注意，诸如含有孔隙和裂隙的固体，这些孔隙和裂隙或者是空的或者充填着气体或液体。两相介质在浅部作为岩石力学模型是重要的。它可以用于软流层的低速层，人们相信那里存在着部分融熔现象。

对于一个有裂隙的固体，其有效模量的计算是由 walsh(1965) 提出的，他的公式已被用来解释各种实验结果。最近，Budiansky 和 O'Connell(1976)主张用一个自调和近似来考虑破裂间相互作用。为了具体说明这个方法的概要，我们来对一个含有随机取向空裂隙的固体，找出其有效体模量 k^*。首先考虑没有裂隙，并以规定的边界牵引力保持其均匀流体静压力P状态下的固体。该系统的势能是 $-P^2V/2k$，其中 k 是固体的体积模量，V 是整个体积。保持外部荷载不变，在物体内置入一裂隙，于是产生一个势能变化 ΔW。于是，有效体积模量 k^*可以由

$$-P^2V/(2k^*)=-P^2V/(2k)+\Delta W \tag{1}$$

所定义。其解对于在一个均匀无界介质单裂缝情况下能量变化 ΔW 是有效的，自恰方法利用了这个解，但均匀介质是以有效模量而不是固体模量来表征其特性的。因此，ΔW 是 k^* 的函数，且通过解(1)来获得 k^*。类似地，有效 Young 模量可通过单轴张力加载来确定。

当我们沿带 $1<ka<10$ 向右移时，问题变得越来越复杂，这里波在非均匀性尺度与波长相当的介质内传播了一个长距离。这种极端复杂性的例子是地方震的尾波；频率在 1—50 赫范围内缓慢的衰减运动，持续 100—1000 次振荡。它们有一个明显的简单特性，即在地震仪记录上某一个特定频率振荡的瞬时衰减几乎是与震中位置、台站位置及联接震中和台站间直达波路径的性质无关（Rautian and Khalturin,1978)。不管来自确定计算法的问题是多么复杂，用或者基于来自许多散射体的反向散射或者基于散射能量扩散的统计方法来处理就变得很简单了。扩散模型已用来解释另一种复杂的记录——月震记录(Dainty et al.,1974)，它在 ka-kL 图中处于像地球内尾波一样的区域。

考虑到地震散射问题的全部观点，我们将着手解决对于更真实的初始模型，例如像层状半空间与球体模型的扰动方法，然后再讨论诸如象有限差分方法那样的数值方法。

13.4 层状介质的横向非均匀性

关于地球内体波和面波观测资料的解释，通常总是使用在横向均匀成层介质中的理论结果。所以，要知道层状介质在横向不均匀时会怎么样是很重要的。非均匀性或许是由一层的厚度变化所引起的，或许是每层地震波速度与密度的变化所引起的。

13.4.1 物质性质的扰动

本节我们将按照 Kennett(1972, a)的方法考虑二维问题，即介质特性及波场仅为 x 和 z 的函数，其中 z 为深度。假设时间依赖于 $\exp(-i\omega t)$，那么 u、v 和 w 的运动方程为

$$
\begin{aligned}
-\rho\omega^2 u &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z},\\
-\rho\omega^2 v &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z},\\
-\rho\omega^2 w &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{13.68}
$$

假定介质是各向同性的，由应力-应变关系得出下述方程：

$$
\begin{aligned}
\tau_{xx} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z},\\
\tau_{xy} &= \mu\frac{\partial v}{\partial x},\\
\tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
\tau_{yz} &= \mu\frac{\partial v}{\partial z},\\
\tau_{zz} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{13.69}
$$

从上述八个方程中消去 τ_{xx} 与 τ_{xy}，并通过把对 z 的导数项放在等式左边的办法来整理方程，结果位移和牵引力分量的方程写成如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} u \\ w \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x & \frac{1}{\mu} & 0 \\ -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\partial_x & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ \begin{matrix} -(\partial_x\xi)\partial_x \\ -\xi\partial_{xx}-\rho\omega^2 \end{matrix} & 0 & 0 & -\partial_x\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\partial_x \\ 0 & -\rho\omega^2 & -\partial_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ w \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix}, \tag{13.70}$$

式中 $\xi=4\mu(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)$，$\partial_x=\partial/\partial x$，而 $\partial_{xx}=\partial^2/\partial x^2$；且

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} v \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ -(\partial_x\mu)\partial_x-\mu\partial_{xx}-\rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}. \tag{13.71}$$

如上所述，当非均匀性和波场都与 y 无关时，切平面(P-SV)问题的方程和法平面(SH)问题的方程是相互独立的。

让我们将物质性质的空间分布分解成仅依赖于深度 z 的基本部分以及同时依赖于 z 和 x 的扰动部分。脚标 0 表示基本部分，而把扰动部分写为

$$\Delta\rho(x, z)=\rho(x, z)-\rho_0(z),$$
$$\Delta\left(\frac{1}{\mu(x,z)}\right)=\frac{1}{\mu(x,z)}-\frac{1}{\mu_0(z)}. \tag{13.72}$$

方程(13.70)与(13.71)能重新改写成如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{f}(x, z)=\boldsymbol{A}_0(z)\boldsymbol{f}(x, z)+\boldsymbol{A}_1(x, z)\boldsymbol{f}(x, z), \tag{13.73}$$

式中 $f(x, z)$ 是在 P-SV 问题中具有分量 $(u, w, \tau_{xz}, \tau_{zz})^T$ 和在 SH 问题中具有分量 $(v, \tau_{yz})^T$ 的运动应力矢量。$A_0(z)$ 是在横向均匀介质(7.28)情况下的矩阵。对 P-SV 问题，

$$A_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x & \dfrac{1}{\mu_0} & 0 \\ -\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0+2\mu_0}\partial_x & 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda_0+2\mu_0} \\ -\zeta_0\partial_{xx}-\rho_0\omega^2 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0+2\mu_0}\partial_x \\ 0 & -\rho_0\omega^2 & -\partial_x & 0 \end{pmatrix} \tag{13.74}$$

而对 SH 问题，

$$A_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\mu_0} \\ \mu_0\partial_{xx}-\rho_0\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.75}$$

矩阵 $A_1(x, z)$ 包含有横向非均匀性的影响，对于 P-SV 问题，从(13.70)中减去(13.74)，得

$$A_1(x,z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta\left(\dfrac{1}{\mu}\right) & 0 \\ -\Delta\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)\partial_x & 0 & 0 & \Delta\left(\dfrac{1}{\lambda+2\mu}\right) \\ \begin{matrix}-(\partial_x\Delta\zeta)\partial_x \\ -\Delta\zeta\partial_{xx}-\Delta\rho\omega^2\end{matrix} & 0 & 0 & \begin{matrix}-\partial_x\Delta\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right) \\ -\Delta\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)\partial_x\end{matrix} \\ 0 & -\Delta\rho\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.76}$$

而对于 SH 问题，从(13.71)中减去(13.75)，得

$$A_1(x, z)=\begin{pmatrix} 0 & \Delta\left(\dfrac{1}{\mu}\right) \\ -(\partial_x\Delta\mu)\partial_x+\Delta\mu\partial_{xx}-\Delta\rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.77}$$

如同在前面几章所看到的，横向均匀介质内波场的 x 相关部分可用因子 e^{ikx} 分离出来，而一个任意场可用对于水平波数 k 的积分来构制。甚至在横向不均匀情况下，波数的概念还是有用的。我们把 $\boldsymbol{A}_1(x, z)$和$\boldsymbol{f}(x, z)$关于 x 的 Fourier 变换记为

$$\boldsymbol{A}_1(k, z)=\int \boldsymbol{A}_1(x, z)e^{-ikx}dx;$$

$$\boldsymbol{f}(k, z)=\int \boldsymbol{f}(x, z)e^{-ikx}dx,$$

于是(13.73)的 Fourier 变换可写为

$$\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{f}(k, z)=\boldsymbol{A}_0(z)\boldsymbol{f}(k, z)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}_1(k-k', z)\boldsymbol{f}(k',z)dk', \tag{13.78}$$

(13.74)与(13.75)式中 ∂_x 和 ∂_{xx} 分别用 ik 与 $-k^2$ 代换。

利用传播矩阵 $\boldsymbol{P}(z, z_0)$，(13.78)的解由(7.48)给出，$\boldsymbol{P}(z, z_0)$满足

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{P}(z, z_0)=\boldsymbol{A}_0(z)\boldsymbol{P}(z, z_0) \tag{13.79}$$

和

$$\boldsymbol{P}(z_0, z_0)=\boldsymbol{I}, \tag{13.80}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。利用 $\boldsymbol{P}(z, z_0)$，(13.78) 的解可写成

$$\boldsymbol{f}(k, z)=\boldsymbol{P}(z, z_0)\boldsymbol{f}(k,z_0)+\frac{1}{2\pi}\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{P}(z, z')dz'$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}_1(k-k', z')\boldsymbol{f}(k',z')dk'. \tag{13.81}$$

显然，这给出了在 $z=z_0$ 时正确的初始条件。

方程 (13.81) 表明运动应力矢量$\boldsymbol{f}(k, z)$ 由两项组成。一项是对横向均匀介质情况用传播矩阵运算得出来的，另一项表示单位垂直距离上强度为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}_1(k-k', z)\boldsymbol{f}(k', z)dk'$$

分布源的贡献。这个褶积表示含有从一个波数 k' 的平面波转换成另一个波数为 k 的平面波而造成的散射效应。如果 $\boldsymbol{A}_1(k, z)$ 集中在 $k=0$ 处，犹如 $\delta(k)$，那么不同波数间将没有什么转换。当 $\boldsymbol{A}_1(x, z)$ 是 x 的平滑函数时，就是这种情况。另一方面，如果 $\boldsymbol{A}_1(x, z)$ 随 x 迅速地变化，那么 $\boldsymbol{A}_1(z, k)$ 将显示出一个 k 的宽频谱。把宽度表示为 Δk，我们看到在范围 $k-\Delta k$ 和 $k+\Delta k$ 内不同波数间将产生转换。对于一个很大的 Δk，$k-\Delta k$ 与 k 两者之间（或 $k+\Delta k$ 与 k）符号可能相反，因而就引起了反向散射。所以又一次看出小规模的不均匀性在各个方向上产生散射，但在大规模不均匀情况下，散射集中在前进方向上。

假使 $\boldsymbol{A}_1$ 在一定意义上较 $\boldsymbol{A}_0$ 小到足以保证迭代过程收敛，那么积分方程（13.81）能够用迭代方法求解。首先令 $\boldsymbol{A}_1$ 等于零，且第零阶解由求解横向均匀非扰动介质问题得到。然后用 $\boldsymbol{A}_1(k, z)$ 和这个解褶积，并把它代入（13.81）中最后一项。在乘以传播矩阵后，进行深度积分就能得到一阶解。这个过程可重复下去，直至解收敛。一阶解已经由 Kennett(1972 a) 在解非扰动介质是一均匀半空间时的 $P-SV$ 问题以及非扰动介质是一层半空间的 SH 问题时明确地给出。

13.4.2 不规则界面的影响

当物质性质的间断仅发生在横跨水平平面内界面时，运动应力矢量 $\boldsymbol{f}(u, v, w, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz})$ 在内界面上是连续的（5.4节）。现在考虑内界面形状不规则时将会出现什么情况。如同前节那样，假定波场和介质都不依赖于 y，不规则分界面的深度取为 $z=h(x)$，界面起伏在 $z=0$ 附近，并用参数 ρ_1、λ_1、μ_1 和 ρ_2、λ_2、μ_2 把介质 1 和介质 2 区分开，如图 13.12 所示。

位移连续的条件现在必定强加于 $z=h(x)$ 上，因为这是两个区域的分界面，每个区域给出了一个适当的位移表达式。类似地，牵引力的连续条件必定强加于牵引力作用的内界面 $z=h(x)$ 上，因为它分开了两个区域，每一个都给出了适当的应力表达

式。取 $\boldsymbol{n}=(n_x,\ n_y)$ 为垂直于内界面的单位矢量，当（τ_{nx}，τ_{ny}，τ_{nz}）在 $z=h(x)$ 两侧连续时，我们要求牵引力（2.10）的连续性为：

$$
\begin{aligned}
\tau_{nx} &= \tau_{xx} n_x + \tau_{zx} n_z,\\
\tau_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{zz} n_z,\\
\tau_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \tau_{zy} n_z,
\end{aligned}
\tag{13.82}
$$

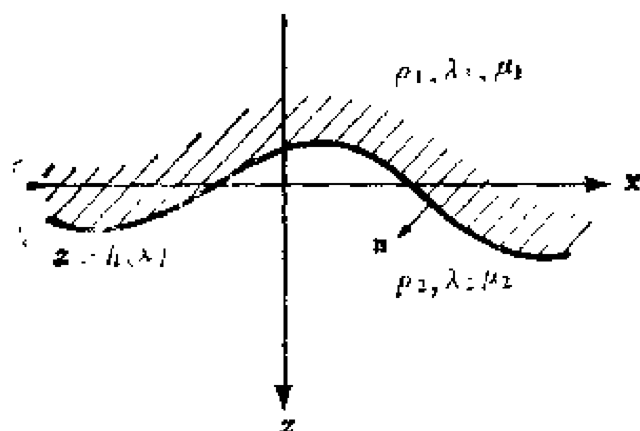


图 13.12

两个均匀介质间的不规则内界面

利用应力-应变关系（13.69），用位移导数代换（13.82）中的 τ_{xx} 和 τ_{yx}，且注意到

$$
n_x=\frac{h'}{(1+h'^2)^{1/2}} \text{ 和 } n_z=\frac{1}{(1+h'^2)^{1/2}},
$$

则可写成

$$
\begin{pmatrix} u \\ w \\ (1+h'^2)^{1/2}\tau_{nx} \\ (1+h'^2)^{1/2}\tau_{nz} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi h'\partial_x & 0 & 1 & \dfrac{-h'\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & 0 & -h' & 1 \end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix} u \\ w \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix},
\tag{13.83}
$$

$$\begin{pmatrix} v \\ (1+h'^2)^{1/2}\tau_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu h'\partial_x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ \tau_{zy} \end{pmatrix}, \tag{13.84}$$

式中 $\xi = 4\mu(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)$，$h'=dh/dx$。上述两个方程的左边是横跨内界面连续的量。在我们的两维问题中 P-SV 和 SH 仍然是解耦的。用矢量形式概括方程（13.83）和（13.84）为

$$g = Qf, \tag{13.85}$$

我们发现 $\mathbf{Q}$ 可写成

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + h'\mathbf{Q}_1, \tag{13.86}$$

对 P-SV 问题，

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi\partial_x & 0 & 0 & \lambda/(\lambda+2\mu) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13.87}$$

而对于 SH 问题，

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mu\partial_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.88}$$

利用上角标（1）或（2）标明特定介质，内界面条件可以表示为

$$(\mathbf{I}+h'\mathbf{Q}_1^{(1)})\mathbf{f}^{(1)}(x,\ h(x)) = (\mathbf{I}+h'\mathbf{Q}_1^{(2)})\mathbf{f}^{(2)}(x,\ h(x)). \tag{13.89}$$

现在让我们假定内界面的起伏不大，因此可用一个 Taylor 展开近似把 $\mathbf{f}(x,\ h(x))$ 表示为

$$\mathbf{f}(x,\ h(x)) - \mathbf{f}(x,\ 0) \sim \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\right)_{z=0} h(x) = \mathbf{A}_0(0)\mathbf{f}(x,0)h(x).$$

然后，从（13.89）中略去比 h 和 h' 更高阶的项，得出

$$(\mathbf{I}+h'\mathbf{Q}_1^{(1)}+h\mathbf{A}_0^{(1)})\mathbf{f}^{(1)}(x,\ 0) = (\mathbf{I}+h'\mathbf{Q}_1^{(2)} + h\mathbf{A}_0^{(2)})\mathbf{f}^{(2)}(x,\ 0). \tag{13.90}$$

在内界面为水平面的情况下，$\mathbf{f}$ 在内界面 $z=0$ 处是连续的，或者说

$f^{(1)}(x, 0)=f^{(2)}(x, 0)$。内界面形状不规则时，显而易见运动应力矢量 f 在 $z=0$ 处不连续。其不连续性由下式给出：

$$f^{(2)}(x, 0)-f^{(1)}(x, 0)=(h'Q_1^{(2)}+hA_0^{(2)})f^{(2)}(x,0)$$
$$-(h'Q_1^{(1)}+hA_0^{(1)})f^{(1)}(x, 0). \qquad (13.91)$$

正如第七章中证明的，运动应力矢量不连续的作用就好像一个地震震源。当 f 内的不连续性比起 f 本身足够小时，能够用 $f^{(0)}\sim f^{(1)}\sim f^{(2)}$ 来代替（13.91）式右边的 $f^{(1)}$ 和 $f^{(2)}$。然后把(13.91)重新写为

$$f^{(2)}(x, 0)-f^{(1)}(x, 0)=[h'(x)(Q_1^{(2)}-Q_1^{(1)})$$
$$+h(x)(A_0^{(2)}-A_0^{(1)})]f^{(0)}(x, 0). \qquad (13.92)$$

取上面这个方程的 Fourier 变换，并把 x 空间内的乘积看作是在 k 空间内的褶积，得到

$$f^{(2)}(k, 0)-f^{(1)}(k, 0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(k-k')$$
$$\times L_{21}(k, k')f^{(0)}(k')dk', \qquad (13.93)$$

其中对于 P-SV 问题而言，

$$L_{21}=$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1} & 0 \\ -ik'\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2}-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2+2\mu_2}-\frac{1}{\lambda_1+2\mu_1} \\ -(\rho_2-\rho_1)\omega^2+(\zeta_2-\zeta_1)kk' & 0 & 0 & -\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2}-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1}\right)ik \\ 0 & -(\rho_2-\rho_1)\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$(13.94)$$

而对 SH 问题，

$$L_{21}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1} \\ -(\rho_2-\rho_1)\omega^2+(\mu_2-\mu_1)kk' & 0 \end{pmatrix}.$$
$$(13.95)$$

和在（13.81）中所表明的非均匀物质有类似的结果，一个不规则界面的散射影响，可用由于 k 空间内内界面形状和原生波场

的褶积来表示。如果 $h(x)$ 是平滑的，而 $h(k)$ 集中在 $k=0$ 处，散射波则将有与原生波相同的波数。如果 $h(x)$ 变化剧烈，且 $h(k)$ 有一个很宽的波谱，不同波数间将产生相互作用，包括反向散射。

由于体波或面波入射在一个局部形状不规则的内界面上产生的远场的散射面波，能够用（7.132）—（7.136）中所描述的方法计算出来，其解在运动应力矢量中以规定的间断数震源而给出。Kennett（1972 b）把此方法应用于一个半空间表面附近的包体问题，并应用于单层与半空间内界面的包体问题。

13.4.3 不规则内表面问题的 Rayleigh 初解方法

前节所描述的扰动方法仅限于一个弱不规则内界面，因为 Taylor 展开仅对内界面高度 $h(x)$ 的一次幂进行，况且（13.92）式右边的散射场被省略了。我们来寻找一种消除这些限制的方法，首先回顾一下精确的内界面条件

$$(\boldsymbol{I}+h'\boldsymbol{Q}_1^{(1)})\boldsymbol{f}^{(1)}(x,\ h(x))=(\boldsymbol{I}+h'\boldsymbol{Q}_1^{(2)})\boldsymbol{f}^{(2)}(x,\ h(x)), \tag{13.89}$$

式中的 $\boldsymbol{Q}$ 在（13.87）和（13.88）中给出。

假定介质 1 和 2 都是均匀各向同性的，我们可以把位移场表示为一个平面 P，SV 与 SH 波的迭加，如在第五章与第六章给出的那样。利用

$$\boldsymbol{f}(x,\ z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(k,z)e^{ikx}dk \tag{13.96}$$

及

$$\boldsymbol{f}(k,\ z)=\boldsymbol{F}(k,\ z)\mathbf{w}(k). \tag{13.97}$$

$\boldsymbol{F}$ 是层矩阵，它的每一列表示上行波或者下行波内的位移与应力，而 $\mathbf{w}$ 是对 $\boldsymbol{F}$ 的列加权。SH 波的层矩阵由（5.63）给出，P-SV 波的层矩阵在（5.65）给出。

把（13.96）代入（13.89），得下列方程：

$$(\boldsymbol{I}+h'\boldsymbol{Q}_1^{(1)})\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{(1)}(k,\ h(x))e^{ikx}dk$$

$$=(\boldsymbol{I}+h'\boldsymbol{Q}_1^{(2)})\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{(2)}(k,h(x))e^{ikx}dk. \quad (13.98)$$

如果将（13.97）代入上述方程，其结果是使内界面上部介质的加权矢量 $\mathbf{w}^{(1)}(k)$ 与界面下部介质加权矢量 $\mathbf{w}^{(2)}(k)$ 相联系的矢量积分方程，在平的内界面的情况下，$h(x)$ 和 $h'(x)$ 为零，而(13.98) 简化为

$$\boldsymbol{f}^{(1)}(k,\ 0)=\boldsymbol{f}^{(2)}(k,\ 0). \quad (13.99)$$

因此，在平的内界面两侧不同波数 k 与 k' 之间是不耦合的。然而，对于非规则内界面来讲，不同波数中的耦合不仅发生在内界面的两侧，而且在同一边的上行波及下行波之间也有耦合，因为一般来讲，每个 $\mathbf{w}^{(1)}$ 和 $\mathbf{w}^{(2)}$ 都包含两种类型的波。

除了内界面条件(13.89) 外，对一个给定问题必须规定震源与辐射条件。例如，考虑一个波数为 k_0、从介质 2 出射的平面 SH 波，如图 13.13 所示。在介质 1 中的辐射条件和在介质 2 中的源条件分别为

$$\mathbf{w}^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\ \acute{S}_1(k)\end{pmatrix}\text{和 } \mathbf{w}^{(2)}=\begin{pmatrix}\acute{S}_2(k)\\ \delta(k-k_0)\end{pmatrix}. \quad (13.100)$$

这将允许介质 2 中散射 SH 波下行而介质 1 中散射 SH 波上行。但上述的初解并不允许介质 1 内散射下行 SH 波及介质 2 中散射上行 SH 波[入射波由 $\delta(k-k_0)$ 表示]，因为在这些情况下是违背辐射与震源条件的。但是，我们需要这些被禁止的波来表示内界面附近的波场。如在图 13.13 中那些近乎平行于内界面的箭头所示的那样。这种内在的问题曾由 Lippman (1953) 指出，而后来被总结称为 Rayleigh 初解误差。但实际上，对于一个包含有适当不规则内界面的种种问题，初解似乎是令人满意的。

积分方程(13.98) 的数值解可以用一个离散波数的有限和代替积分来获得。我们用下述离散波数表达式来代替(13.96)：

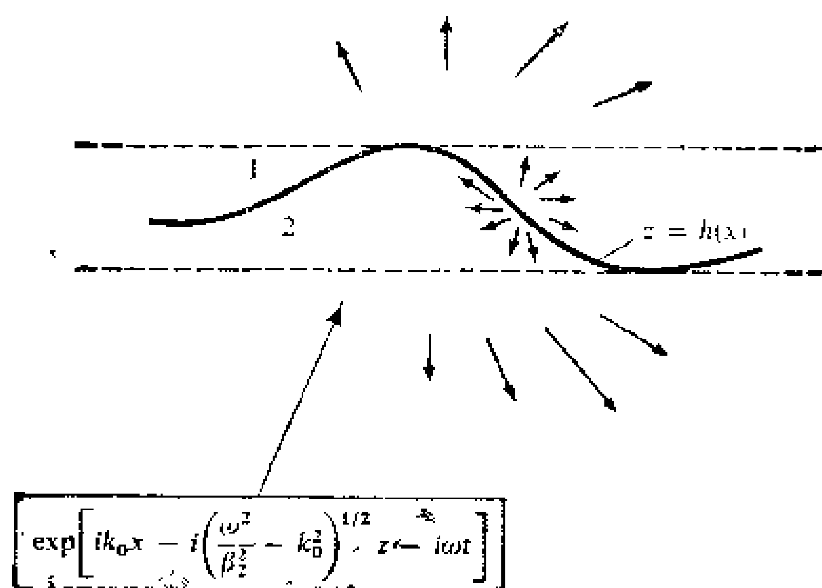


图 13.13

Rayleigh 初解(13.100)不能描述靠近不规则内界面附近的介质 1 中的下行波与介质 2 中的上行波

$$f(x,\ z)=\frac{1}{L}\sum_{n}F(k_n,\ z)\mathbf{w}\,(k_n)\exp(ik_nx),$$

(13.101)

式中 $k_n=2\pi n/L$ 并对所有整数 n 求和，上述表达式意味着在 x 方向波场是周期性的，重复间隔为 L。这要求内界面形状 $h(x)$ 在 x 方向具有相同的周期性。因此，来自相邻间隔的影响是误差的来源。这些影响对一个距不规则内界面的距离较 L 足够小的台站来讲是可以忽略的，因此来自邻近间隔的干扰振幅较小，到达较迟。正因为如此，用这种方法研究散射源近场问题是最有效的。

邻近间隔的影响可以用把小的虚部引入频率中而使之尽量减小。令 $\omega=\mathrm{Re}\,\omega+i\,\mathrm{Im}\,\omega$，可将单侧函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换表示为

$$f(\omega)=\int_0^\infty f(t)\exp(i\omega t)dt$$

$$= \int_0^\infty [f(t)\exp(-\text{Im}\,\omega\cdot t)]\exp(i\,\text{Re}\,\omega\cdot t)dt. \qquad (13.102)$$

这个扩展到复频率的 Fourier 变换不是别的，正是用指数衰减窗锥形化后的函数的通常的 Fourier 变换。因而使用复数频率，可以减少所不希望的迟的到达。

把 (13.101)代入(13.98)，将内界面条件简化成 $\mathbf{w}^{(1)}(k_n)$ 和 $\mathbf{w}^{(2)}(k_n)$的无限维的线性齐次方程组。为了求解这些方程，必须在一定数 N 上截断求和，并假定比截断波数限更高的波数的贡献可以忽略。然后我们在象被截断的求和那样多的离散波数上对内界面方程(13.98)进行 Fourier 变换，对于 SH 问题在每个内界面上给出有 $2N$ 个方程的方程组(对 P-SV 问题有 $4N$ 个)。因为在 $\mathbf{w}^{(i)}(k_n)$内未知数($n=1$, 2, $\cdots$, N) 是每层 $2N$ 个 (对 P-SV 问题为 $4N$ 个)，所以它们完全由(13.100)给出的内界面条件加辐射与震源条件所决定。

作为一个例子，我们来考虑在一个模拟凹形 Moho 面的不规则内界面上平面 SH 波的散射问题，如图 13.14 所示。此处，我们为消除复杂的成层效应仅考虑两个半空间在内界面上接触问题。入射波是从下半空间以 $\theta_0=55°$ 角入射的，而内界面形状是全周余弦波，其波长为 50 公里，而凹进最大深度为 5 公里。重复间隔选为 256 公里。振幅和相位延迟是对下半个空间内入射波波长分别为 5，10，20 公里几种情况进行计算的。图 13.14 表明在未扰动情况下的标准振幅及与之有关的时间延迟。上述计算是由 Larner(1970)做出的。他把计算值与用 Snell 定理的射线追踪所得理论解做了比较。其射线理论振幅是利用在平内界面上平面波的传递系数，并假定沿着给定射线为界的射线管上的能流为常数来计算的。在 $x=-5$ 公里和 $x=45$ 公里时，振幅的跃变相当于内界面形状二阶导数的间断。在 $x=23$ 公里附近的大振幅是由于聚焦影响而引起的。对于 $\lambda_2=5$ 公里，非常接近由射线理论所得到的结果。随着入射波长的增加，扰动幅度的范围和相位延迟扩

大了。这与前节所述扰动理论的推测相一致。如在(13.93)内所示，不规则内界面形状相当于一个地震震源，它以一个 k 空间内的内界面形状和原生波的卷积来表示其特征。对于宽度为 W 的余弦式凹陷和 $k=k_0$ 的平面原生波，预计散射波将分布在范围 $k_0-2\pi/W<k<k_0+2\pi/W$ 之间。角扩散的范围可以用 $k/(\omega/\beta_2)=k\lambda_2/2\pi=\sin\theta$ 来度量，其中 θ 为介质 2 内波数为 k 的射线的入射角，相应的范围是 $\sin\theta_0-\lambda_2/W<\sin\theta<\sin\theta_0+\lambda_2/W$ 因而对于低频散射波的角扩散将更大。在 $W=50$ 公里，$\lambda_2=5,10,20$ 公里时，预计 $\sin\theta$ 的展布分别为 ±0.1，±0.2 及 ±0.4。这正是我们在图 13.15 中所看到的。图中上半空间中的散射波 $S_1(k_n)$ 的绝对值是以 $k_n/(\omega/\beta_2)=\sin\theta$ 为横坐标来作图的，其中原生波的振幅已归一化。波数谱的散布从峰值下到 6 分贝，在 $\lambda_2=5$，10 与 20 公里时分别为 ±0.1，±0.2 与 ±0.4。

在这个例子中，我们见到的散射是以前向为主，因为如图 13.15 所示，波数的散布不足以改变 k 的符号。在图 13.14 中所示空间里，振幅和时间滞后的分布清楚地证明了它是前向占优势的散射。

Rayleigh 初解方法可以有各种各样的应用。安艺等(Aki and Larner，1970)首先应用这个方法计算不同横截面的松软盆地对入射的平面 SH 波的响应。Larner(1970)利用这个方法并使用穿过台阵的远震 P 波振幅和到时的变化资料测定了大孔径地震台阵下部 Moho 界面的深度与形状。Bouchon(1973)把这个方法推广到研究一个不规则地形表面的地震运动。不规则自由表面上的边界条件可以令(13.83)与(13.84)中 $\tau_{nx}=\tau_{ny}=\tau_{nz}=0$ 来得到。

Bouchon 与 Aki(1972 a)在这个问题中还包括了一个任意地震震源。如在第六章内所讨论的，无界均匀介质中时间函数为 $\exp(-i\omega t)$ 的二维震源可用一个对水平波数 k 的积分来表示。我们用一个离散波数的有限和来代替这个积分，且用它与(13.101)中的项来相加。对给定源将不可避免地存在一些奇点，未知系数

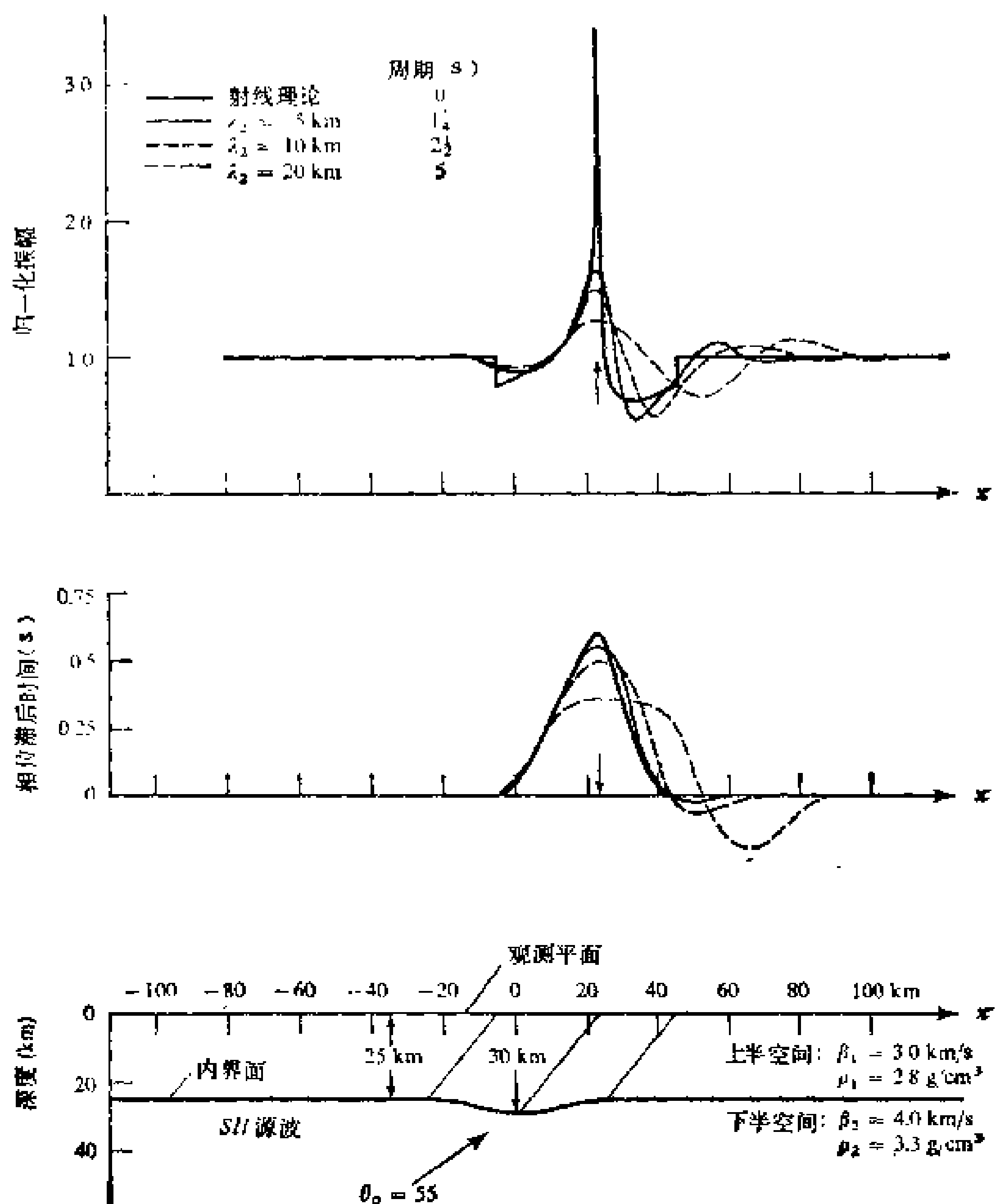


图 13.14

在一个连结两个半空间凹内界面的情况下，波长对 SH 波散射的影响．沿上半空间内的一平面画出了位移振幅及时间滞后。在 $x=25$ 公里处的箭头指出通过凹谷的几何射线路径与观测平面相交。给出了同一入射角(55°)下三种不同波长的结果(引自 Larner，1970)

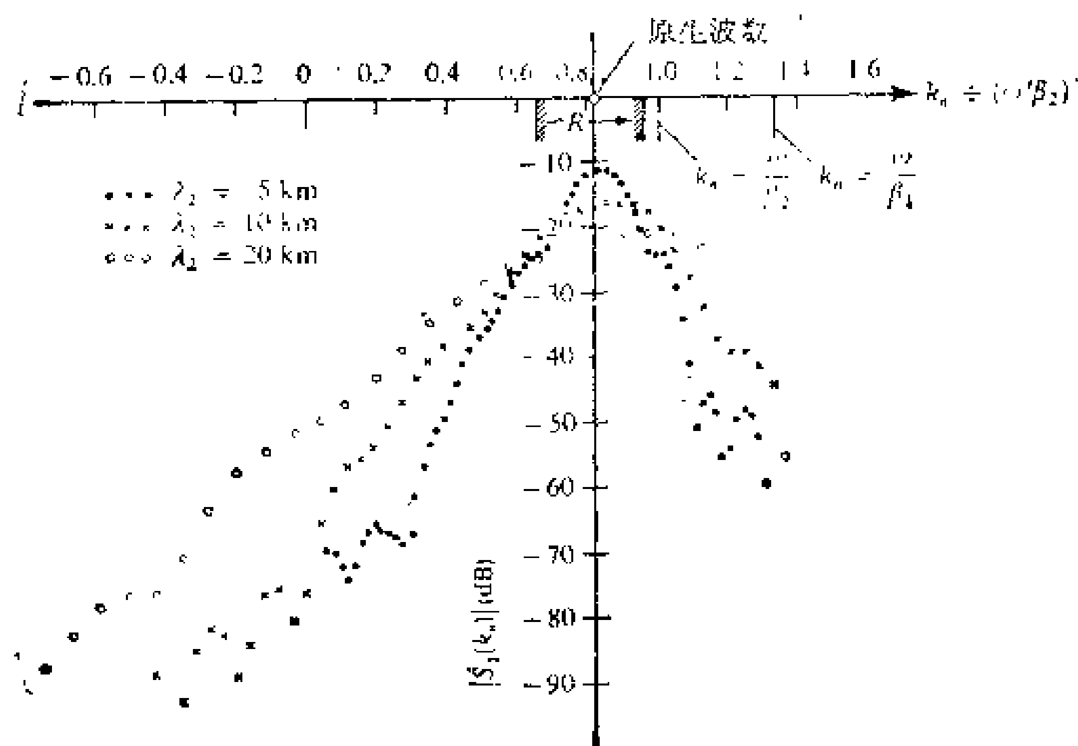


图 13.15

对于图13.14所示三种情况下上半空间中的上行波用原生波归一化后的波数谱。R表示的区域是我们依据射线理论预期的散射波波数间隔范围。$|k_n|>\omega/\beta_2$ 和 $|k_n|>\omega/\beta_1$ 分别相应于上、下半空间内的非均匀波，用它们来和边界条件匹配(引自 Larner，1970)

$\mathbf{w}(k)$ 由内界面和边界条件确定。例如由 Rayleigh 波的根等这样的奇异性所引起的数值计算的困难，可以通过在频率上引入小的虚部来避免。这种影响可用乘以 $\exp(\text{Im}\ \omega\cdot t)$(见(13.102))使之以最终时间域的解来消除掉。图 13.16 表示了由于这样计算而得结果的例子。其介质是由一个有限的、上覆有层状半空间的松软盆地所组成的。地震震源是一个相当于盆地下的倾滑地震的双力偶。对于两种不同频率计算了在地表面垂直与水平方向的位移振幅。为了区分源与介质的影响，同时给出了有与没有盆地两种情况下所产生的结果。虽然图形非常复杂，但是对于所有频率，水平运动因盆地构造而系统地放大了，且较垂直运动更严重。对于松软盆地问题在13.6.4节中将对使用不同方法获得的结果进行比较。

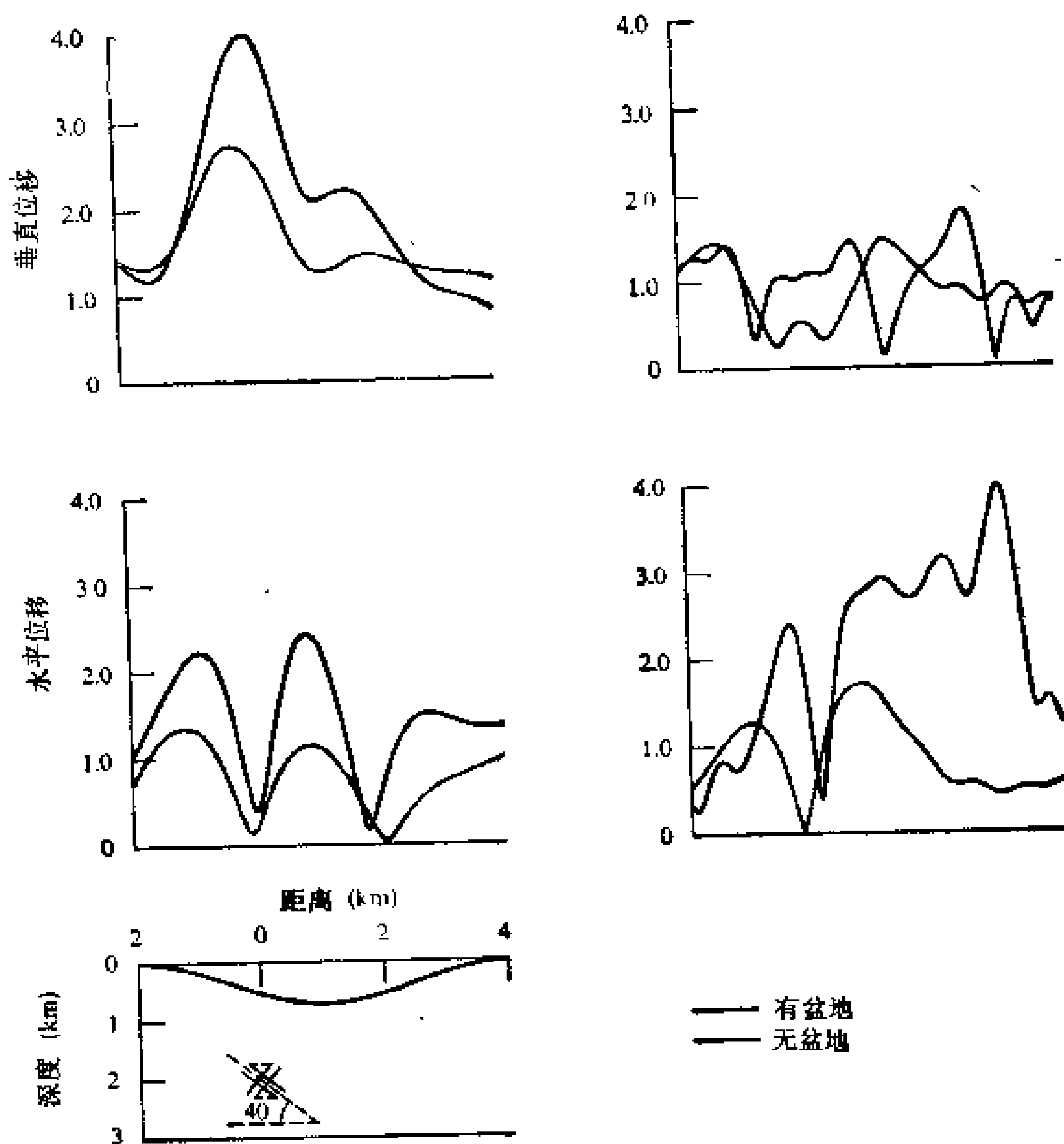


图 13.16

位于盆地下一个倾滑地震震源所引起的软沉积盆地上部的地震运动。沉积物的影响使表面运动在 0.5 赫时有所增强（图左边），但在 2.0 赫时(右边)使表面运动减弱(引自 Bouchon and Aki, 1977 a)

13.5 地球结构的横向不均匀性引起的地球自由振荡的波谱分裂

在上节里，我们研究了层状半空间内由于局部横向不均匀性所造成的地震波散射。所得结果对于解释在不均匀区域附近或在局部不均匀区域之外远场中观测到的地震图是有用的。但是不均匀性在地球各处都是存在的。海洋、大陆、洋中脊、深海沟、转换断层、山脉及其它大规模的不均匀区域分布在整个地球上。考虑一次地震所产生的面波，原生波将扩展开来，扫到地球表面，并会聚到对蹠点。扫到地球表面过程里，所有的不均匀区域将作为二次源并产生散射波。这些散射波互相干涉，而且与从对蹠点返回震中的原生波以及返回的原生波产生的散射波互相干涉。假如地球由无损耗介质构成，上述过程将永远进行下去，最终会形成一个绕地球传播的非常复杂而又全耦合的面波图案。那么自由振荡周期会发生什么情况呢？为了回答这一问题，我们将对横向均匀的地球模型参数引入一个小扰动，这种情况下的自由振荡问题在第八章中已做了研究。这里我们将从第八章中对任意非均匀，流体预应力介质导出的基本方程出发并仿效 Madariaga(1972)所采用的步骤。

根据(8.54)—(8.59)及(8.68)，一个具有初应力场$-P\delta_{ij}$的任意非均匀介质的运动方程可以写为：

$$-\rho\omega^2 u_i-2i\rho\omega(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u})_i=(\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij})_{,j}+\rho(\Phi_{,j}u_j)_{,i}-P_{,i}e_{kk}+\rho\phi_{,i} \qquad (13.103)$$

式中 $\boldsymbol{u}\exp(-i\omega t)$是平衡状态附近的一个小的弹性振动位移，而$\phi\exp(-i\omega t)$是平衡值$\Phi$附近的重力势变化。左边第二项是由于地球旋转$\boldsymbol{\Omega}$引起的 Coriolis 力，$\lambda$，$\mu$ 和 ρ 是弹性常数与密度，e_{ij} 是与 $\boldsymbol{u}$ 有关的应变分量，$e_{kk}=u_{k,k}$是体膨胀。重力势ϕ满足

$$\nabla^2\phi=4\pi\gamma(\rho u_i)_{,i}. \qquad (13.104)$$

利用球面坐标(r, θ, ϕ)，将弹性常数和密度分离成一个球对称部分和一个小的任意非均匀部分：

$$
\begin{aligned}
\rho(r, \theta, \phi) &= \rho_0(r) + \delta\rho(r, \theta, \phi), \\
\lambda(r, \theta, \phi) &= \lambda_0(r) + \delta\lambda(r, \theta, \phi), \\
\mu(r, \theta, \phi) &= \mu_0(r) + \delta\mu(r, \theta, \phi). \qquad (13.105)
\end{aligned}
$$

把(13.105)代入(13.103)和(13.104)，仅保留扰动的一次项，得到关于$\boldsymbol{u}$和ϕ的方程：

$$
\begin{aligned}
H_i(\boldsymbol{u}, \phi) &= H_{0i}(\boldsymbol{u}, \phi) + \delta H_i(\boldsymbol{u}, \phi) = -\rho_0\omega^2 u_i, \\
\mathscr{L}(\boldsymbol{u}, \phi) &= \mathscr{L}_0(\boldsymbol{u}, \phi) + \delta\mathscr{L}(\boldsymbol{u}, \phi) = 0, \qquad (13.106)
\end{aligned}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
H_{0i}(\boldsymbol{u}, \phi) = {} & (\lambda_0 e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_0 e_{ij})_{,j} - \rho_0 \Phi_{0,r} e_{kk}\delta_{ir} \\
& + \rho_0(\Phi_{0,r} u_r)_{,i} + \rho_0\phi_{,i}, \qquad (13.107)
\end{aligned}
$$

$$
\mathscr{L}_0(\boldsymbol{u}, \phi) = \frac{1}{4\pi\gamma}\nabla^2\phi + (\rho_0 u_i)_{,i}, \qquad (13.108)
$$

$$
\begin{aligned}
\delta H_i(\boldsymbol{u}, \phi) = {} & \delta\rho\omega^2 u_i + 2i\rho_0\omega(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u})_i + (\delta\lambda e_{kk}\delta_{ij} \\
& + 2\delta\mu e_{ij})_{,j} + \delta\rho[(\Phi_{0,r} u_r)_{,i} - \Phi_{0,r}\delta_{ri} e_{kk}] \\
& + \rho_0[(\delta\Phi_{,j} u_j)_{,i} - \delta\Phi_{,i} e_{kk}] + \delta\rho\phi_{,i}, \qquad (13.109)
\end{aligned}
$$

$$
\delta\mathscr{L}(\boldsymbol{u}, \phi) = -(\delta\rho u_i)_{,i}. \qquad (13.110)
$$

$\delta\Phi$是由于密度扰动引起的重力场扰动。$\delta\Phi$满足 Poisson 方程：

$$
\nabla^2\delta\Phi = -4\pi\gamma\delta\rho.
$$

方程(13.106)与适当的均匀边界条件一起，定义了一个确定横向非均匀地球自由振荡周期的本征值问题。正如我们在前节中所用的初解那样，为了将扰动场表示为非扰动问题解的线性组合，假定横向非均匀地球的本征函数能表示为球对称地球的本征函数线性组合[共用同样的序数(n, l)]。我们来考虑球对称地球内的一个球型振型${}_nS_l$或一个扭转振型${}_nT_l$。如第八章中所表明的，相应于${}_nS_l$的本征函数是

$$
\begin{aligned}
{}_n\boldsymbol{u}^{0Sm}_l &= U(r)\boldsymbol{R}_l^m(\theta, \phi) + V(r)\boldsymbol{S}_l^m(\theta, \phi), \\
{}_n\phi_l^{0m} &= K(r)Y_l^m(\theta, \phi), \qquad (13.111)
\end{aligned}
$$

面相应于 ${}_nT_l$ 的本征函数是

$$ {}_n\mathbf{u}_l^{0Tm} = W(r)T_l^m(\theta,\ \phi), \tag{13.112} $$

它的表面谐波矢量在(8.13)中给出。对于一个固定的 l 与 n，所有 $2l+1$ 个球型振型 ${}_nS_l^m(-l\leqslant m\leqslant l)$ 有相同的角本征频率 ${}_n\omega_l^S$，所有的 $2l+1$ 个扭转振型 ${}_nT_l^m$ 也有同样的角本征频率。一般来讲，横向不均匀将除去这种简并，并把非扰动频率分离为 $2l+1$ 个频率，写做

$$ \begin{aligned} {}_n\omega_l^{Si} &= {}_n\omega_l^S + \delta_n\omega_l^{Si}\quad(-l\leqslant i\leqslant l), \\ {}_n\omega_l^{Ti} &= {}_n\omega_l^T + \delta_n\omega_l^{Ti}\quad(-l\leqslant i\leqslant l). \end{aligned} \tag{13.113} $$

为了近似相应的本征函数，我们使用下列初解：

$$ \begin{aligned} {}_n\mathbf{u}_l^{Si} &= \sum_m c_{mn}\mathbf{u}_l^{0Sm}\quad(-l\leqslant i\leqslant l), \\ {}_n\phi_l^i &= \sum_m c_{mn}^i\phi_l^{0m}\quad(-l\leqslant i\leqslant l), \end{aligned} \tag{13.114} $$

和

$$ {}_n\mathbf{u}_l^{Ti} = \sum_m D_{mn}^i\mathbf{u}_l^{0Tm}\quad(-l\leqslant i\leqslant l). \tag{13.115} $$

补充 13.3

准简并

若非扰动问题的多重简并本征频率相互完全不同，以致没有发生耦合的话，就允许利用具有固定$(n,\ l)$的非扰动本征函数线性组合作为扰动介质(13.114)与(13.115)本征函数的试验函数。另一方面，如果非扰动问题的多重简并本征值相互之间十分接近，以致由于扰动引起的任何单个多重线其一阶修正会大于不同多重线的分离，那么试验函数的以上形式就不再成立。这就是准简并情况，Dahlen(1969)曾用于研究旋转椭球地球的问题，Luh(1973)用来研究横向非均匀地球问题。

把上述初解代入(13.106)并略去标号 S，l 和 n，对球型振型我们得到：

$$\sum_m c_m^i[H_{0i}(\boldsymbol{u}^{0m},\ \phi^{0m})+\delta H_i(\boldsymbol{u}^{0m},\ \phi^{0m})]=-\rho_0(\omega^i)^2\sum_m c_m^i u_i^{0m},$$

$$\sum_m c_m^i[\mathscr{L}_0(\boldsymbol{u}^{0m},\phi^{0m})+\delta\mathscr{L}(\boldsymbol{u}^{0m},\ \phi^{0m})]=0. \qquad (13.116)$$

非扰动介质的本征函数$(\boldsymbol{u}^{0m},\ \phi^{0m})$满足方程

$$H_{0i}(\boldsymbol{u}^0,\ \phi^0)=-\rho_0\omega^2 u_i^0,$$

$$\mathscr{L}_0(\boldsymbol{u}^0,\ \phi^0)=0. \qquad (13.117)$$

从(13.116)减去(13.117)得

$$\sum_m c_m^i\delta H_i(\boldsymbol{u}^{0m},\ \phi^{0m})=-\rho_0\delta(\omega^i)^2\sum_m c_m^i u_i^{0m},$$

$$\sum_m c_m^i\delta\mathscr{L}(\boldsymbol{u}^{0m},\ \phi^{0m})=0. \qquad (13.118)$$

对非扰动介质，取(13.118)与每一个本征函数之内积，得到

$$\sum_{m=-l}^{l} c_m^i\delta H_{m'm}=\delta(\omega^i)^2 c_{m'}^i,\ (-l\leqslant i\leqslant l) \qquad (13.119)$$

其中

$$\delta H_{m'm}=\frac{-\int_v[u_i^{0m'*}\delta H_i(\boldsymbol{u}^{0m},\phi^{0m})+\phi^{0m'*}\delta\mathscr{L}(\boldsymbol{u}^{0m},\phi^{0m})]dV}{\int_v\rho_0|\boldsymbol{u}^{0m'}|^2dV}$$

(13.120)

(*表示复数共轭)。

线性方程组(13.119)定义了一个本征值问题。对于不为零的c_m^i，$\delta(\omega^i)^2$必是矩阵$\delta H_{m'm}$的本征值、一旦本征值被确定，相应的本征函数能够用(13.119)之解c_m^i代入(13.114)得到。

例如，对环型振荡，频率扰动是具有以下元素的矩阵$\delta\boldsymbol{H}$的本征值：

$$\delta H_{m'm}=\frac{\int_v u_i^{0m'*}(2\delta\mu e_{ij}^{0m})_{,j}dV+(\omega)^2\int\delta\rho u_i^{0m'*}u_i^{0m}dV}{\int_v\rho_0|\boldsymbol{u}^{0m'}|^2dV}, \qquad (13.121)$$

式中 δH 如在(13.109)中给出的那样，显然用 $\delta\mu$ 与 $\delta\rho$ 表示；并略去了在第八章中讨论过的地球自转的影响。利用 Gauss 定理与地球表面无牵引力的自由边界条件，能够证明，矩阵 $\delta H_{m'm}$ 是 Hermitian 矩阵：

$$\delta H_{m'm} = \delta H^*_{mm'}. \tag{13.122}$$

所以(13.119)中本征值 $\delta(\omega^i)^2 \sim 2\,\omega\delta\omega^i$ 将是实数

为了计算 $\delta H_{m'm}$，必须知道非扰动介质的本征函数 u_l^{0m}。由于它们和 (θ,ϕ) 的关系，如在(13.111)和(13.112)中那样，由 $Y_l^m(\theta,\phi)$ 给出，所以很自然可把介质扰动 $\delta\lambda$，$\delta\mu$ 和 $\delta\rho$ 也用球谐函数来展开：

$$\begin{aligned}
\delta\lambda(r,\theta,\phi) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=-s}^{s}\delta\lambda_s^t(r)Y_s^t(\theta,\phi),\\
\delta\mu(r,\theta,\phi) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=-s}^{s}\delta\mu_s^t(r)Y_s^t(\theta,\phi),\\
\delta\rho(r,\theta,\phi) &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=-s}^{s}\delta\rho_s^t(r)Y_s^t(\theta,\phi)
\end{aligned} \tag{13.123}$$

把体元写成 $dV=r^2dr\cdot d\Omega$，(13.121) 中的积分可以被分解成径向积分和角积分。径向部分必须用数字求积。角部分简化成三个球谐函数乘积的积分：

$$I = \int_{\Omega_0} d\Omega Y_l^{m'*}(\theta,\phi)Y_s^t(\theta,\phi)Y_l^m(\theta,\phi), \tag{13.124}$$

其中 Ω_0 是一个单位半径的球面，其积分可用 Clebsch-Gordan 系数来表示，这些系数在角动量的量子理论中是熟知的(Edmonds, 1960)，

$$I = \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}}(stlm|sllm')(s\,0\,l\,0|sll\,0). \tag{13.125}$$

括号内的项是 Clebsch-Gordan 系数。它们可展开成整数级数，这很容易利用计算机来求值。

角积分 I 仅当　　i) s 是偶数

$$\text{ii)}\ s<2l \tag{13.126}$$

iii) $m'=t+m$

时不等于零。

这三个球谐函数阶数和次数之间的关系式称做选择法则。它们在自由振荡受横向不均匀性影响方面有着重要而有意义的含意。

法则 (i) 表明用奇数阶球谐函数所表达的横向不均匀性不能显示出在自由振荡周期上可观察到的影响。显然，我们不能从观测到的自由振荡周期中揭示出横向不均匀性的奇次谐波。然而，只有在扰动方法中采用的假设有效时这才是真实的。如果非扰动介质两个不同的振型的频率非常接近，它们也许会失败。在这种情况下，准简并方法是可用的(补充13.3)。

法则 (ii) 表明，阶数为 l 的自由振荡仅受阶数低于 $2l$ 横向不均匀谐波的影响。换句话说，不均匀性的尺度比自由振荡半波长小的话，并不影响本征频率。虽然从图 13.11 我们可以预计出 ka 值小时出现弱散射，然而当不均匀性规模长度等于半波长时，相应的 ka 值等于 π，这是一个相当高的值。有趣的是从图 13.11 中可以看到，对一无界随机介质内的平面波，散射效应只有在 ka 等于 π，kL 小于 10 左右时才可以略去不计。

法则 (iii) 表明非扰动时本征函数 ${}_nu_l^m$ 和 ${}_nu_l^{m'}$ 之间的耦合仅在方位角阶数 t 等于 $m'-m$ 的非均匀谐波中产生。在本章的前面我们已看到一个相类似的关系。例如在(13.81)内，已发现原生波、散射波的波数谱及在横向不均匀层状介质内的不均匀性是与 k 空间内的一个褶积相联系的。若不均匀性和原生波分别有单一波数 k_0 和 k_1，褶积将为 $\delta(k-k_0)*\delta(k-k_1)=\delta(k-k_0-k_1)$。因此，散射波也将有单一波散 k_0+k_1。实际上这就是法则(iii)。

由法则(iii)，得到对角线元素 δH_{mm} 仅包含 $Y_s^0(\theta,\phi)$ 而对角线元素的和将有如下形式的因子：

$$\int_{\Omega_0} d\Omega\, Y_s^0(\theta,\phi) \sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m'*}(\theta,\phi) Y_l^m(\theta,\phi).$$

因此，对于球谐函数，加法定理给出

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\theta,\phi)\, Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(0) = \frac{2l+1}{4\pi},$$

且由于

$$\int_{\Omega_0} d\Omega Y_s^0(\theta,\phi) = 0,$$

得

$$\sum_{m=-l}^{l} \delta H_{mm} = 0. \tag{13.127}$$

因矩阵迹的不变性，所以本征值$\delta_n\omega_l^i$的和也是零：

$$\sum_{i=-l}^{l} \delta_n \omega_l^i = 0. \tag{13.128}$$

这就是所谓对角线求和法则，它首先由 Gilbert(1971,a)应用于自由振荡扰动问题。由于这条法则，能够肯定由于横向不均匀性造成的频率分离的平均值，等于未扰动的球对称地球模型的频率。如果我们所指的观测到的自由振荡频率是由于横向不均匀性造成的频率分离的平均值，那么这些观测值就与从实际地球因横向平均获得的球对称地球模型相联系了。

$\delta\omega^i$ 的实际计算曾由 Madariaga (1972)对环形振荡及由 Lub (1973)对球形振荡做出的。图 13.17 给出了一个例子。

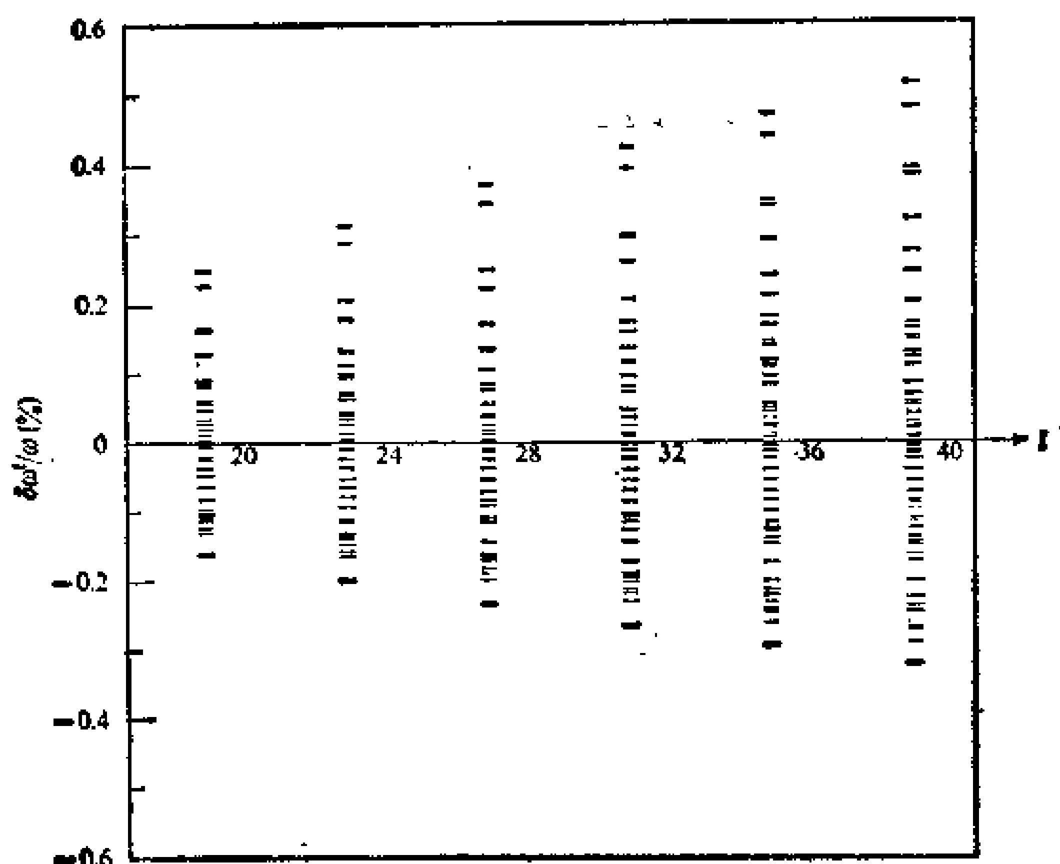


图 13.17

不均匀的海洋-大陆模型的几个不同阶数环形振型的波谱分裂情况，其中大陆采用 CANSD 模型(Brune and Dorman, 1963)，海洋采用 8099 模型 (Dorman et al., 1960) (引自 Madariaga and Aki, 1972)

13.6 有限差分法

有限差分法提供一种根据基本方程、初始条件与边界条件所表达的问题利用数字计算机处理的最直接、最明确的途径。这种方法是普遍的、灵活的，并且可以用于任意形状的非均匀物体。此方法本质上与在实验室内利用一定比例模型进行模拟实验相类似，但结果的精度却远优于后者，它在准备模型和地震震源方面，除了计算程序外，并不需要什么专门技巧，此外它还减少了

由于模型本身有限性所强加的人为边界条件的影响。

有限差分法解决问题的范围及复杂程度取决于计算机的容量，所以寻找一种算法以减少存储量和计算时间绝不是无足轻重的。一种高效率的算法必须最大限度地利用所给问题的对称性，简化基本方程，在所希望精度许可范围内简化边界条件，以及最佳地选择网格图、有限差分公式和人为边界条件。

我们以一维波动方程这种最简单情况为例说明有限差分法在地震学中的应用。

13.6.1 一维波动方程

考虑一个弹性常数和密度仅在 x 方向上变化的介质。对于与平面波传播在同一方向上的位移，其运动方程为

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \tag{13.129}$$

其中

$$E(x)=\begin{cases}\lambda(x)+2\mu(x) & \text{对于 } P \text{ 波},\\ \mu(x) & \text{对于 } S \text{ 波}.\end{cases}$$

为了避免取 $E(x)$ 的空间导数，用质点速度 $\dot{u}=\partial u/\partial t$ 与应力 $\tau=E(x)\partial u/\partial x$ 作变量，那么方程(13.129)可由下列联立方程代替：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{u}}{\partial t}&=\frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial \tau}{\partial x},\\ \frac{\partial \tau}{\partial t}&=E(x)\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}.\end{aligned} \tag{13.130}$$

用有限差分公式来近似上述方程有多种办法。为了说明选择一个适当方案的重要性，我们先给出一个总是不稳定的不好的方案例子。在 xt 平面上取样，采样点为$(l\Delta t, m\Delta x)$，其中 l，m 是整数。如图 13.18 所示，利用空间三个点$(l,m-1)$，(l,m)与$(l,m+1)$在同一时间的 τ 和 $\dot{u}$ 值求出下一时间$(l+1,m)$点上的 τ 和 $\dot{u}$ 值。方程(13.130)的 x 导数可用中心差分，而 t 导数可用前向

差分来近似：

$$\frac{\dot{u}_m^{l+1}-\dot{u}_m^l}{\Delta t}=\frac{1}{\rho_m}\frac{\tau_{m+1}^l-\tau_{m-1}^l}{2\Delta x},$$
$$\frac{\tau_m^{l+1}-\tau_m^l}{\Delta t}=E_m\frac{\dot{u}_{m+1}^l-\dot{u}_{m-1}^l}{2\Delta x}. \tag{13.131}$$

为了寻求上述方案的稳定性，考虑 τ 和 $\dot{u}$ 在 $t=0$ 时的初始误差，并研究误差是否将随时间而增加。设形式为$\exp(ikx-i\omega t)$的干扰在(l,m)处造成误差为

$$E(\tau_m^l)=A\exp(-i\omega l\Delta t+ikm\Delta x),$$
$$E(\dot{u}_m^l)=B\exp(-i\omega l\Delta t+ikm\Delta x). \tag{13.132}$$

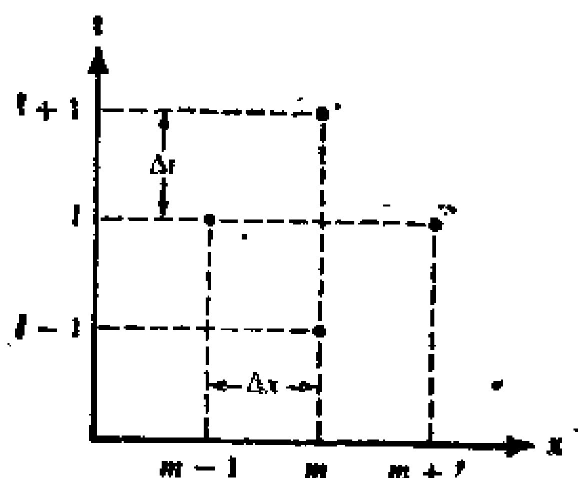


图 13.18

对于固定的实数 k，我们求出频散关系 $\omega(k)$，它描述了误差对时间的依赖性。

由于误差与解满足相同的方程，把(13.132)代入(13.131)求得

$$B[\exp(-i\omega\Delta t)-1]=\frac{\Delta t}{2\rho_m\Delta x}A[\exp(ik\Delta x)-\exp(-ik\Delta x)],$$

$$A[\exp(-i\omega\Delta t)-1]=\frac{E_m\Delta t}{2\Delta x}B[\exp(ik\Delta x)$$

$$-\exp(-ik\Delta x)].$$

消去 A/B，得

$$[\exp(-i\omega\Delta t)-1]^2 = -\frac{E_m}{\rho_m}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(\sin k\,\Delta x)^2$$

或

$$\exp(-i\,\omega\Delta t)-1=\pm i\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\sin k\Delta x.$$

补充 13.4

对导数的有限差分近似

对于能用 Taylor 级数展开的函数 $\phi(x)$，有

$$\phi(x\pm\Delta x)=\phi(x)\pm\frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(\Delta x)^2$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}(\Delta x)^3+\text{高阶项}$$

定义前向差分公式为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{\Delta x}[\phi(x+\Delta x)-\phi(x)],$$

而后向差分公式为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{\Delta x}[\phi(x)-\phi(x-\Delta x)].$$

两个公式的截断误差有一个正比于 Δx 的首项。此外，中心差分公式定义为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{2\Delta x}[\phi(x+\Delta x)-\phi(x-\Delta x)],$$

它有一个 $(\Delta x)^2$ 阶的首项误差。

用增加 $\phi(x+\Delta x)$ 和 $\phi(x-\Delta x)$ Taylor 级数展开项的办法，很容易求出 $\partial^2\phi/\partial x^2$ 的公式：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{1}{(\Delta x)^2}[\phi(x+\Delta x)-2\,\phi(x)+\phi(x-\Delta x)].$$

上述公式的首项误差也是 $(\Delta x)^2$ 阶。对更高阶公式，请参看 Abramowitz 和 Stegun(1965)的文章。

于是，对任意选择的$\Delta t/\Delta x$，$|\exp(-i\omega t)|>1$，所以ω必定是复数，且(13.132)所给出的误差将随时间增量 l 呈指数增加。

对 t 的导数现在也利用中心差分公式。下面所示的新公式将由$(l,m-1)$，$(l,m+1)$和$(l-1,m)$的值得出$(l+1,m)$ 点的解，如图(13.19)所示：

$$\frac{\dot{u}_m^{l+1}-\dot{u}_m^{l-1}}{2\Delta t}=\frac{1}{\rho_m}\frac{\tau_{m+1}^l-\tau_{m-1}^l}{2\,\Delta x},$$
$$\frac{\tau_m^{l+1}-\tau_m^{l-1}}{2\,\Delta t}=E_m\frac{\dot{u}_{m+1}^l-\dot{u}_{m-1}^l}{2\,\Delta x}. \tag{13.133}$$

利用同样的初解(13.132)，由(13.133)得

$$B[\exp(i\omega\Delta t)-\exp(-i\omega\Delta t)]=\frac{-\Delta t}{\rho_m\Delta x}A[\exp(ik\Delta x)-\exp(-ik\Delta x)],$$

$$A[\exp(i\omega\Delta t)-\exp(-i\omega\Delta t)]=\frac{-E_m\Delta t}{\Delta x}B[\exp(ik\Delta x)-\exp(-ik\Delta x)].$$

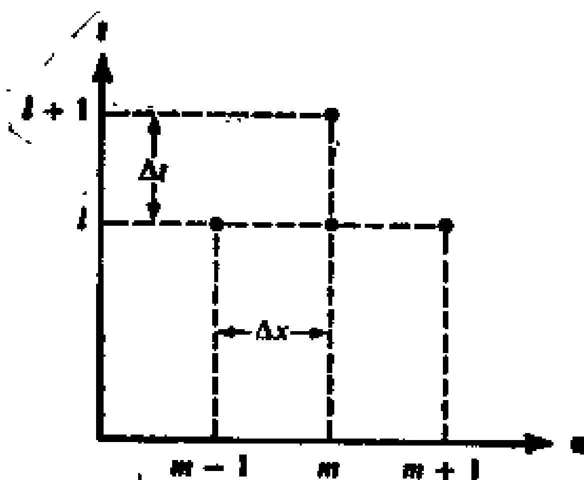


图 13.19

消去A/B，得

$$\sin\omega\Delta t=\pm\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin k\,\Delta x. \tag{13.134}$$

在这种情况下，若$\sqrt{E_m/\rho_m}(\Delta t/\Delta x)\leqslant 1$，那么$|\sin\omega\Delta t|$也总是小于或等于1。因而，$\omega$是实数，且误差将不随时间增加，从而稳定性的条件是使时间网格间隔Δt小于或等于$\Delta x/c_m$，式中$c_m=\sqrt{E_m/\rho_m}$是局部的波速。在以上讨论中，无疑地假设初解(13.132)适用于E_m和ρ_m几乎为常数的区域。

利用交错网格可得到一个更好的方案。如图13.20所示，$\dot{u}$的网格是将τ的网格在t和x两个方向上都移动半个网格长度得出的。然后，将下述有限差分近似式用于方程(13.130)中：

$$\frac{\dot{u}_m^{l+\frac{1}{2}}-\dot{u}_m^{l-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=\frac{1}{\rho_m}\frac{\tau_{m+\frac{1}{2}}^l-\tau_{m-\frac{1}{2}}^l}{\Delta x},$$

$$\frac{\tau_{m+\frac{1}{2}}^{l+1}-\tau_{m+\frac{1}{2}}^l}{\Delta t}=E_{m+\frac{1}{2}}\frac{\dot{u}_{m+1}^{l+\frac{1}{2}}-\dot{u}_m^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \tag{13.135}$$

因为误差正比于采样间隔的平方，且时间间隔短了一半，所以上述近似公式的首项误差是(13.133)给出的前述情况的四分之一。在这种情况下，

$$\sin\frac{\omega\Delta t}{2}=\sqrt{\frac{E_{m+\frac{1}{2}}}{\rho_m}}\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\frac{k\Delta x}{2}. \tag{13.136}$$

因而对$\Delta t/\Delta x$的稳定性要求与前述情况所要求的是相同的。

最后，通过从(13.135)中消去τ来求出只含$\dot{u}$的有限差分方程。考虑如图13.21所示邻近的四个菱形。将下述方程应用于这些菱形：

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_m^{l+\frac{1}{2}}-\dot{u}_m^{l-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\rho_m}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\tau_{m+\frac{1}{2}}^l-\tau_{m-\frac{1}{2}}^l),\\
&\tau_{m-\frac{1}{2}}^l-\tau_{m-\frac{1}{2}}^{l-1}=E_{m-\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\dot{u}_m^{l-\frac{1}{2}}-\dot{u}_{m-1}^{l-\frac{1}{2}}),\\
&\tau_{m+\frac{1}{2}}^l-\tau_{m+\frac{1}{2}}^{l-1}=E_{m+\frac{1}{2}}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\dot{u}_{m+1}^{l-\frac{1}{2}}-\dot{u}_m^{l-\frac{1}{2}}),
\end{aligned} \tag{13.137}$$

$$\dot{u}_m^{l-\frac{1}{2}} - \dot{u}_m^{l-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\rho_m}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\tau_{m+\frac{1}{2}}^{l-1} - \tau_{m-\frac{1}{2}}^{l-1}\right).$$

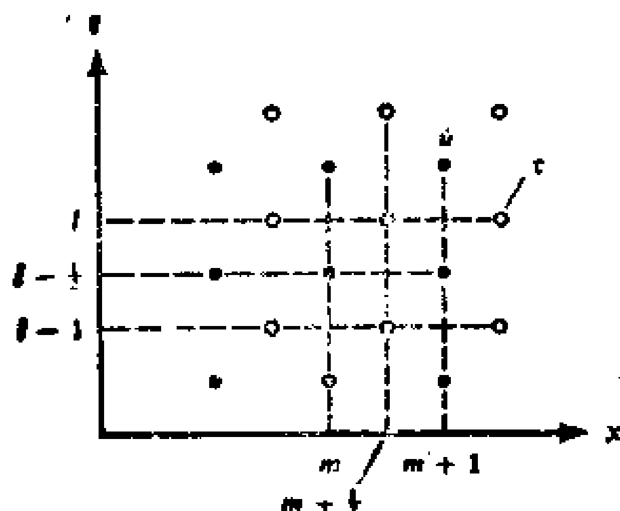


图 13.20

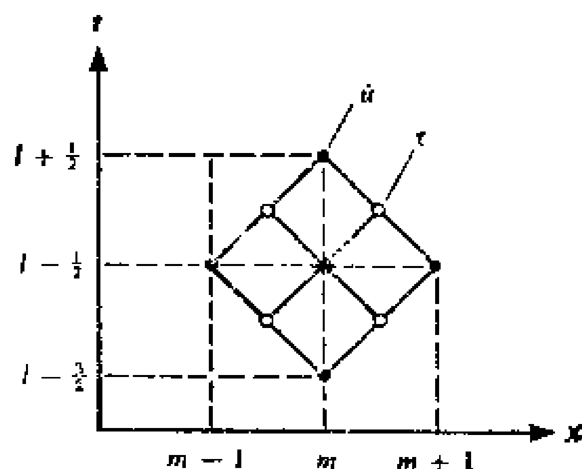


图 13.21

从上述方程中消去所有的 τ，并把角标 $l-\dfrac{1}{2}$ 改写为 l，得到

$$\frac{\rho_m(\dot{u}_m^{l+1} - 2\dot{u}_m^l + \dot{u}_m^{l-1})}{(\Delta t)^2} = \frac{E_{m-\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2}(\dot{u}_m^l - \dot{u}_{m-1}^l)$$

$$+ \frac{E_{m+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2}(\dot{u}_{m+1}^l - \dot{u}_m^l). \quad (13.138)$$

上述方程的右边可以通过在 $\partial/\partial x[E(x)\partial\dot{u}/\partial x]$ 内连续应用公式

$$\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}\right)_m = \frac{\dot{u}_{m+\frac{1}{2}} - \dot{u}_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (13.139)$$

得到。由于方程左边是对于 $\rho(\partial^2\dot{u}/\partial t^2)$ 的中心差分近似，方程(13.138)能够利用(13.139)从 u 的运动方程直接得到。方程(13.137)的截断误差和稳定条件应该与用交错网格方法得到的误差相同。

关于有限差分方程(13.133)，(13.135)和(13.138)所得稳定性条件在物理上是可以理解的。既然在介质内的任何干扰都是随

速度 c 而传播的，所以在时间-空间点$(l+1,m)$发生事件不会受到(l,m)点数值的影响。若 Δt 小于 $\Delta x/c$ 的话，$m'>m+1$ 或者 $m'<m-1$。在那种情况下，$(l+1,m)$上的值可以由$(l,m-1)$，$(l,m+1)$和$(l-1,m)$点上的值所唯一确定，这个事实是有其物理基础的，例如像(13.133)中所给出的那样。此外，如果 Δt 大于 $\Delta x/c$，不同于$(l,m-1)$与$(l,m+1)$，来自(l,m')上值的影响是可以预料的，由方程(13.133)唯一确定$(l+1,m)$点上的值是不可能的。

根据上述物理论据可以预料，若在公式中用格点$(l+1,m-1)$和$(l+1,m+1)$测定$(l+1,m)$的值，将不存在稳定性问题，因为这两个点包含了所有影响$(l+1,m)$的信息。建立在这一想法上的公式被Crank和Nicolson(1947)用于扩散方程。由于每一个有限差分方程含有三个未知数，所以具有三对角矩阵大的线性方程组必定是可解的。Crank-Nicolson 方法应用于地震问题是由Claerbout(1976)提出的。

稳定性条件(13.136)也给出了满足于解的频率 ω 和波数 k 之间的关系。如果 Δt 和 Δx 很小，由(13.136)所确定的相速度与群速度接近正确的局部值，这是因为当 Δt 和 Δx很小时，可以近似地用 θ 代替 $\sin\theta$，并由(13.136)得

$$\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{E_{m+\frac{1}{2}}}{\rho_m}}=c_0.$$

重要的是要了解 Δx 小到什么程度才使上述关系近似正确。其限度取决于波长 $\lambda=2\pi/k$。整理(13.136)，得出

$$\frac{\omega}{k}=\frac{\Delta x}{\pi\Delta t}\,\frac{\lambda}{\Delta x}\text{arc}\sin\left(c_0\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\frac{\pi\Delta x}{\lambda}\right).$$

相应的群速度为

$$\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{c_0\cos\dfrac{\pi\Delta x}{\lambda}}{\left[1-\left(c_0\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\sin\dfrac{\pi\Delta x}{\lambda}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

当波长变到为网格间距的两倍时，群速度变为零。在图 13.22 中，几种 $\Delta t/\Delta x$ 值的群速度和相速度都是 $\Delta x/\lambda$ 的函数。显然，网格间距必定要小于波长的 1/10 以避免大于百分之几的频散。换言之，每一个波长需要 10 个左右的网格点。这就是为什么在 ka-kL坐标图(图13.11)内有限差分法仅对小区域是适合的。它对于求出震源邻近区域内的波场或者是非均匀性来讲是最有用的。

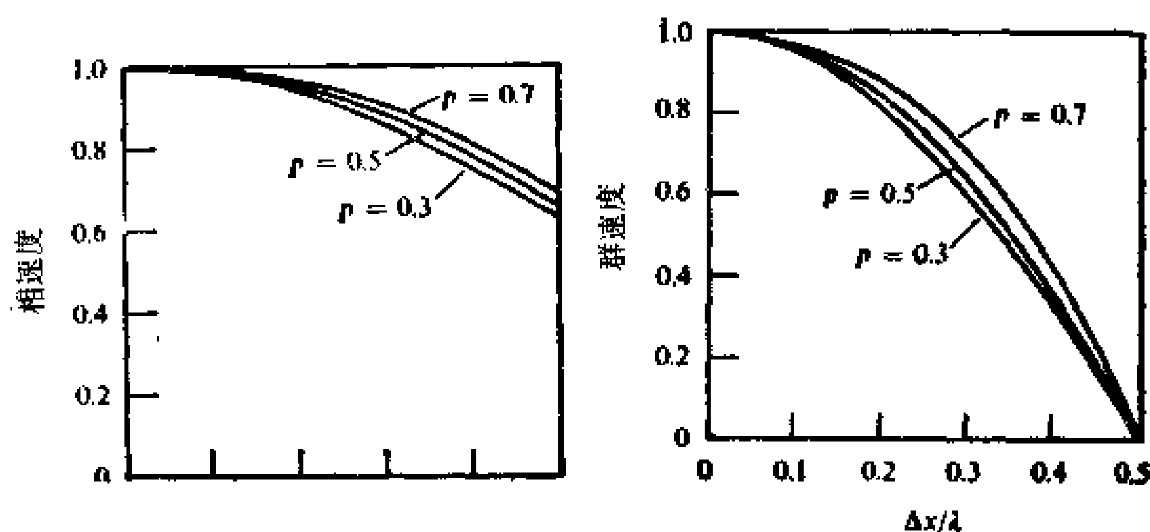


图 13.22

对于不同的稳定性比率 $p=c_0\Delta t/\Delta x$，用 c_0 归一化后的相速度与群速度(引自Alford et al., 1974)

13.6.2 二维和三维问题

有限差分近似可直接扩大到用于二维和三维问题的运动方程，包括对稳定性与频散的估计。这里我们将总结成功地应用于地震学中某些特殊问题的公式。

(i) 最简单的两维问题是处理 SH 波和 Love 波的法平面问题。在 y 方向位移 v 的基本方程是

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad (13.140)$$

式中$\mu(x,z)$是介质的刚度，$\rho(x,z)$是密度。如果介质是均匀的，可用有限差分对在补充 13.4 中所给出的二阶导数进行近似，以便

把(13.140)近似为

$$v_{m,n}^{l+1}-2v_{m,n}^{l}-v_{m,n}^{l-1}+\frac{\mu}{\rho}(\Delta t)^2$$

$$\times\left(\frac{v_{m+1,n}^{l}-2v_{m,n}^{l}+v_{m-1,n}^{l}}{(\Delta x)^2}+\frac{v_{m,n+1}^{l}-2v_{m,n}^{l}+v_{m,n-1}^{l}}{(\Delta z)^2}\right),$$

(13.141)

式中 Δz 为 z 方向上网格的间隔， n 是说明网格上 z 坐标的整数值。上述公式曾被Boore(1970,1972)用来研究有不规则内界面与不规则外形的层状介质内 Love 波和 SH 波的散射。

应用公式(13.136)求出 x 与 z 的导数，就很容易扩展到非均匀介质情况，结果是：

$$v_{m,n}^{l+1}-2v_{m,n}^{l}-v_{m,n}^{l-1}$$

$$+\frac{(\Delta t)^2}{\rho_{m,n}}\left[\frac{\mu_{m+\frac{1}{2},n}v_{m+1,n}-(\mu_{m+\frac{1}{2},n}+\mu_{m-\frac{1}{2},n})v_{m,n}+\mu_{m-\frac{1}{2},n}v_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}\right]$$

$$+\frac{(\Delta t)^2}{\rho_{m,n}}\left[\frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}v_{m,n+1}-(\mu_{m,n+\frac{1}{2}}+\mu_{m,n-\frac{1}{2}})v_{m,n}+\mu_{m,n-\frac{1}{2}}v_{m,n-1}}{(\Delta z)^2}\right],$$

(13.142)

它将(13.140)准确地近似到二阶增量。把(m,n)点上的密度和环绕(m,n)的四个点上的刚度值代入上述方程，此方程就预估出 v 在(m,n)点上的值。

二维方程稳定性条件为 $\Delta t\leqslant\Delta x/(\sqrt{2}\beta)$， 式中 β 是剪切波速度$\sqrt{\mu/\rho}$，取 Δz 与 Δx 相等。一般来讲，n 维空间的均匀介质内波动方程的稳定条件为 $\Delta t\leqslant\Delta x/(\sqrt{n}\beta)$。

(ii) 然后我们考虑二维切平面问题(P-SV 和 Rayleigh 波)，其中位移分量 u， w 是 x 和 z 的函数，而 y 分量 v 为零。对于一个在均匀各向同性体中的切平面问题，运动方程(4.1)简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\alpha^2-\beta^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+\beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(\alpha^2-\beta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\qquad(13.143)$$

式中 α 与 β 分别是纵波和横波速度。上述方程用矢量形式写为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\boldsymbol{A}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2}+\boldsymbol{B}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x \partial z}+\boldsymbol{C}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial z^2}, \tag{13.144}$$

其中

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha^2-\beta^2 \\ \alpha^2-\beta^2 & 0 \end{pmatrix},$$

和

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

然后，利用中心有限差分近似精确到二阶增量，得出公式：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(x,z,t+\Delta t)-2\boldsymbol{u}(x,z,t)+\boldsymbol{u}(x,z,t-\Delta t)\\
&=\boldsymbol{A}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2[\boldsymbol{u}(x+\Delta x,z,t)-2\boldsymbol{u}(x,z,t)+\boldsymbol{u}(x-\Delta x,z,t)]\\
&+\boldsymbol{B}\frac{(\Delta t)^2}{4\Delta x \Delta z}[\boldsymbol{u}(x+\Delta x,z+\Delta z,t)-\boldsymbol{u}(x+\Delta x,z-\Delta z,t)\\
&\qquad -\boldsymbol{u}(x-\Delta x,z+\Delta z,t)+\boldsymbol{u}(x-\Delta x,z-\Delta z,t)]\\
&+\boldsymbol{C}\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right)^2[\boldsymbol{u}(x,z+\Delta z,t)-2\boldsymbol{u}(x,z,t)+\boldsymbol{u}(x,z-\Delta z,t)].
\end{aligned} \tag{13.145}$$

Alterman和Rotenberg(1969)用这个方程研究理论地震学中一个经典的四分之一空间内的地震波问题。又由 Ottaviani(1971)把应用范围扩大到两个四分之一空间密接问题之中。若取 $\Delta x=\Delta z$，公式(13.145)的稳定性条件为 $\Delta t \leqslant \Delta x/(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}$。

(iii) 一些具有特别简单对称性的三维地震问题已经用有限差分法解决了。扩展中的圆形剪切破裂所产生的地震波问题就是这样的例子。这个问题由 Madariaga(1976)研究过，15.1.5 节中做了描述。这里我们将给出 Alterman 和 Karal (1968) 得到的另一个例子，他们首先证明了利用有限差分法可使地震学界成功地用它来解决成层介质内爆炸源的问题。

假定来自爆炸源的直达波为球对称，层状介质内合成波场对

于通过爆炸中心的垂直轴将具有方位对称性。取对称轴为 z 轴、各向均匀同性体内径向位移 $A(r,z)$ 和垂直向位移 $B(r,z)$ 的运动方程可简化为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = {} & \alpha^2\left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}-\frac{1}{r^2}A+\frac{\partial^2 B}{\partial r\partial z}\right] \\
& +\beta^2\left[\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 B}{\partial r\partial z}\right], \\
\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = {} & \alpha^2\left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{\partial^2 A}{\partial z\partial r}\right] \\
& +\beta^2\left[\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 A}{\partial z\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r}\right].
\end{aligned}
\tag{13.146}
$$

位移的方位角分量为零。把 r, z 与 t 的网格间距分别表示为 Δr, Δz, Δt，网格点的位置表示为 $(m\Delta r, n\Delta z, l\Delta t)$，对(13.146) 用有限差分近似可写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
A^{l+1}_{m,n} = {} & 2A^l_{m,n}-A^{l-1}_{m,n}+\alpha^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta r}\right)^2\left[A^l_{m+1,n}-2A^l_{m,n}+A^l_{m-1,n}\right] \\
& +\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta r}\right)^2\frac{1}{m}\left[A^l_{m+1,n}-A^l_{m-1,n}\right]-\alpha^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta r}\right)^2\frac{1}{m^2}A^l_{m,n} \\
& +\frac{1}{4}\frac{(\Delta t)^2}{\Delta r\Delta z}(\alpha^2-\beta^2)\left[B^l_{m+1,n+1}-B^l_{m+1,n-1}-B^l_{m-1,n+1}\right. \\
& \left.+B^l_{m-1,n-1}\right]+\beta^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right)^2\left[A^l_{m,n+1}-2A^l_{m,n}+A^l_{m,n-1}\right],
\end{aligned}
\tag{13.147}
$$

$$
\begin{aligned}
B^{l+1}_{m,n} = {} & 2B^l_{m,n}-B^{l-1}_{m,n}+\alpha^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right)^2\left[B^l_{m,n+1}-2B^l_{m,n}\right. \\
& \left.+B^l_{m,n-1}\right]+\frac{1}{2}\frac{(\Delta t)^2}{\Delta r\Delta z}(\alpha^2-\beta^2)\frac{1}{m}\left[A^l_{m,n+1}-A^l_{m,n-1}\right] \\
& +\frac{1}{4}\frac{(\Delta t)^2}{\Delta r\Delta z}(\alpha^2-\beta^2)\left[A^l_{m+1,n+1}-A^l_{m+1,n-1}-A^l_{m-1,n+1}\right. \\
& \left.+A^l_{m-1,n-1}\right]+\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta r}\right)^2\frac{1}{m}\left[B^l_{m+1,n}-B^l_{m-1,n}\right]
\end{aligned}
$$

$$+\beta^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta r}\right)^2\left[B^l_{m+1,n}-2B^l_{m,n}+B^l_{m-1,n}\right]. \qquad (13.148)$$

所有出现在上述方程中的导数仍然精确到各个自变量的二阶增量。

上述公式不能用于 $m=0$，因为公式内包含有因子 $1/m$；$m=0$ 相当于 $r=0$，即方位对称轴。因为在 $r=0$ 处位移的对称性和连续性，径向分量在 $r=0$ 时必为零。因此在 $m=0$ 用

$$A^{l+1}_{0,n}=0 \qquad (13.149)$$

代替(13.147)。

在(13.148)内包含有 $1/m$ 的项相当于运动方程内的 $1/r(\partial B/\partial r)$ 和 $1/r(\partial A/\partial z)$。除去源点外，物理上它们不应当在 $r=0$ 时变成无限。例如，我们期待有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r}=\text{常数}=C_1,$$

或对于小的 r 有

$$\frac{\partial B}{\partial r}=C_1 r \text{ 与 } \frac{\partial^2 B}{\partial r^2}=C_1.$$

因此，对于小 r，可用 $\partial^2 B/\partial r^2$ 代替 $1/r(\partial B/\partial r)$，并用 $\partial^2 A/\partial r\partial z$ 代替 $1/r(\partial A/\partial z)$。将 $\partial^2 B/\partial r^2$ 和 $\partial^2 A/\partial r\partial z$ 的有限差分公式代入(13.148)，发现对 $m=0$ 有

$$B^{l+1}_{0,n}=2B^l_{0,n}-B^{l-1}_{0,n}+\alpha^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta z}\right)^2\left[B^l_{0,n+1}-2B^l_{0,n}+B^l_{0,n-1}\right]$$

$$+\frac{(\Delta t)^2}{\Delta r\Delta z}(\alpha^2-\beta^2)\left[A^l_{1,n+1}-A^l_{1,n-1}\right]$$

$$+4\beta^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta r}\right)^2\left(B^l_{1,n}-B^l_{0,n}\right), \qquad (13.150)$$

这里我们已经利用了对称关系 $A^l_{-1,n}=-A^l_{1,n}$ 与 $B^l_{-1,n}=B^l_{1,n}$。

(13.147) 和 (13.148) 的稳定性条件是 Alterman 和 Karal (1968)得出的，即当 $\Delta r=\Delta z$ 时，

$$\Delta t\leqslant\Delta r/(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}.$$

(iv) 当波最初沿固定方向传播时，其广角散射、反向散射以及反射可以忽略，可以修改波动方程以大大减少每个波长内网格点数目。此处只考虑速度 $c(x,z)$ 在空间变化的二维波动方程这种最简单情况：

$$-\omega^2 P = c^2(x,z)\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right), \tag{13.151}$$

其中假定时间函数关系为exp(－$i\omega t$)。

取波传播的主方向为 z 轴，将$\omega/c(x,z)$的空间平均表示为$\bar{k}$，即写成

$$P(x,z)=Q(x,z)e^{i\bar{k}z}, \tag{13.152}$$

式中 $\bar{k}=\langle\omega/c(x,z)\rangle$。若介质是均匀的，而波场由 z 方向传播的平面波组成，则 $Q(x,z)$ 是一个常数。对于一个弱均匀介质和最初沿 z 方向传播的波，能预计到 $Q(x,z)$ 将是一个 x，z 的缓变函数，且可以顺利地用有限差分法处理。

把(13.152)代入(13.151)，得

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}+2i\bar{k}\frac{\partial Q}{\partial z}+\left[\left(\frac{\omega}{c(x,z)}\right)^2-\bar{k}^2\right]Q=0. \tag{13.153}$$

现在我们做一个重要的假定：与(13.153)中其它项相比 $\partial^2Q/\partial z^2$ 可以忽略掉。那么(13.153)就变成

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+2i\bar{k}\frac{\partial Q}{\partial z}+\left[\left(\frac{\omega}{c(x,z)}\right)^2-\bar{k}^2\right]Q=0. \tag{13.154}$$

省略 $\partial^2Q/\partial z^2$ 有时称之为抛物线近似，并被距 z 轴不远沿一个方向上传播的波所证明是正确的。为了找出这种近似的影响，考虑在一均匀介质内平面波传播的情况，此时 $\omega/c(x,z)=\bar{k}$。于是(13.154)变成

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+2i\bar{k}\frac{\partial Q}{\partial z}=0. \tag{13.155}$$

因为$P(x,z)=\exp(ik_x x+ik_z z)$，我们有

$$Q(x,z)=\exp(ik_x x+ik_z z-i\bar{k}z).$$

把它代入(13.155)得

$$-k_x^2-2\,\bar{k}(k_z-\bar{k})=0$$

或

$$k_z=\bar{k}-\frac{k_x^2}{2\,\bar{k}}. \qquad (13.156)$$

上式可以认为是一个修正波动方程解

$$k_z=(\bar{k}^2-k_x^2)^{1/2}=\bar{k}\left(1-\frac{1}{2}\frac{k_x^2}{\bar{k}^2}+\cdots\right) \qquad (13.157)$$

的近似方程(13.156)对于 $k_x/\bar{k}$ 很小时是一个好的近似；换言之，对那些与 Z 轴成小角度方向上传播的波是一种好的近似。对于一个圆柱波波数积分表达式，若在指数上的 k_z 用(13.156)来近似，则最后的积分给出一个抛物线的波阵面。

关于均匀情况下的有限差分公式可利用 Crank-Nicolson 方法获得，为

$$2\,i\bar{k}\left(\frac{Q_m^{n+1}-Q_m^n}{\Delta z}\right)=-\frac{Q_{m+1}^n-2\,Q_m^n+Q_{m-1}^n}{2\,(\Delta x)^2}$$

$$-\frac{Q_{m+1}^{n+1}-2\,Q_m^{n+1}+Q_{m-1}^{n+1}}{2\,(\Delta x)^2}, \qquad (13.158)$$

式中 Δx 和 Δz 是 x 和 z 方向上的网格间隔，$x=m\Delta x$，$z=n\Delta z$。非均匀情况的公式(13.154)可类似地写出来。通常把形式为

$$Q_m^n=\exp[\,ik_xm\Delta x+i(k_z-\bar{k})n\Delta z]$$

的解代入(13.158)，得出关系式

$$\tan\left[\frac{(k_z-\bar{k})\Delta z}{2}\right]=\frac{-1}{\bar{k}}\frac{\Delta z}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \qquad (13.159)$$

我们可以把上述方程改写成一个 k_z 的显式方程

$$\frac{k_z}{\bar{k}}=1-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\lambda}{\Delta_z}\right)\arctan\left\{\frac{1(\Delta z/\lambda)}{2\,\pi(\Delta x/\lambda)^2}\sin^2\left[\,\pi\left(\frac{\Delta x}{\lambda}\right)\sin\theta\right]\right\}, \qquad (13.160)$$

式中 $\lambda=2\,\pi/\bar{k}$ 是波长。上述方程当 Δx 和 Δz 趋于零时简化为(13.156)。表 13.1 分别给出利用修正解(13.157)，抛物线近似

(13.156)和在两种不同网格-波长比率下用有限差分近似对抛物线近似(13.160)等情况下 $k_z/\bar{k}$ 的值。θ 是波传播方向与 z 轴间的夹角，由 $k_x=k\sin\theta$ 给出。即使在 x 和 z 方向上一个波长内只有三个网格点，有限差分法表明在 $\theta<30°$ 时只有很小的频散。如果 $\lambda/\Delta x$ 取为 10，只要保持 $\lambda/\Delta z$ 在 3 以上，则能够把近似扩大到 40° 且只有百分之几的频散。在解释反射资料时可预料这种方法是有用的，而这些资料中对于近垂直方向传播的波是重要的。近似微分方程 (13.154)在苏联早已熟知 (Leontovich and Fok,1946)。Claerbout(1970，1976)利用这个方程作为他试图(见 12.2 节)应用波动方程处理地震反射资料的出发点。Landers 和 Claerbout(1972)也把这个方法扩大到包含 P,S 和 Rayleigh波的各种弹性波问题上。抛物线方程数值计算的优点使得它用来研究那些在横向变化介质内大距离上传播的波 (即图 13.11 中大 kL) 成为可能。

表 13.1　　　　不同近似方法的 $k_z/\bar{k}$ 值

θ	修正值	抛物线近似	有限差分近似	
			$\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{1}{10}$, $\frac{\Delta z}{\lambda}=\frac{1}{3}$	$\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{1}{3}$, $\frac{\Delta z}{\lambda}=\frac{1}{3}$
0	1.000	1.000	1.000	1.000
10	0.985	0.985	0.985	0.985
20	0.940	0.942	0.942	0.944
30	0.866	0.875	0.877	0.887
40	0.766	0.794	0.799	0.825
50	0.643	0.707	0.720	0.769
60	0.500	0.623	0.651	0.725
70	0.342	0.558	0.597	0.695
80	0.173	0.515	0.564	0.677
90	0.000	0.500	0.552	0.672

13.6.3 源、内界面和边界条件

根据唯一性定理(第二章)，我们知道在一个物体内，如果(I)整个物体内在 $t=t_0$时最初的位移和质点速度是已知的，(II)遍及体内各处的体力在 $t>t_0$ 时是已知的，(III)$t>t_0$ 时包围物体表面上的位移或牵引力已知，则其弹性动力场是唯一确定的。

把这些条件编入有限差分程序中，通常是简而易行的。引入地震震源时惯用的做法是使物体的一部分横向均匀，这样能够使我们把已知的解析表达式用于这部分。

例如，如果我们希望研究入射后在一个非均匀区域上平面体波的散射问题，像图 13.23 所示的那样，那么一个平面波位移与质点速度的解析表达式能够用来描述此物体均匀部分中的初始条件。如果在非均匀区域内波阵面到达前取为 t_0，则非均匀区域内位移和速度的初始值为零，均匀区域必须足够大，以便入射波在来自非均匀区域的反向散射到达人为的边界前完全通过这个边界。在入射波通过后，透射边界条件(在下面讨论)可能确定在人为边界上。

同理，面波从左或右入射的情况下，横向均匀区域内的初始条件和在反射散射波到达之前在人为边界上占优势的边界条件，利用给定模型的本征函数进行 Fourier 变换，使之变成具有所要求的频率容量的时间域，则这些条件可很容易求出。严格地讲，由于一个简正振型的非因果特征，面波波形不可能有一个有限长度。然而，人们能够用均匀区域的范围确定出空间-时间窗，使在窗外的面波小到可以忽略掉，然后以所要求的精度确定震源条件。

地震震源位于物体内的情况本质上可以用同样的方法来处理。定义一个内部人为边界S_i，在它所包围的均匀物体内有一个源。那么在 S_i 内的解可写成在一个均匀无界体内给定源的解析解 u_0 与附加项 u_1 之和。设内部人为边界外的解为 u_2，边界上位移与牵引力连续性将要求在内部人为界面上为

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0$$

和

$$\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_0$$

这里$\boldsymbol{T}_0$，$\boldsymbol{T}_1$与$\boldsymbol{T}_2$分别是相应于$\boldsymbol{u}_0$，$\boldsymbol{u}_1$与$\boldsymbol{u}_2$的牵引力。$\boldsymbol{u}_0$和$\boldsymbol{T}_0$在界面上的值已知为时间的函数，对于$\boldsymbol{u}_1$和$\boldsymbol{u}_2$它们将起地震震源的作用，这是因为它们在位移与牵引力上表现有间断性(3.1节)。通过选择离开震源奇点足够远的人为边界，可以避免出现引起数值计算困难的大数值解。

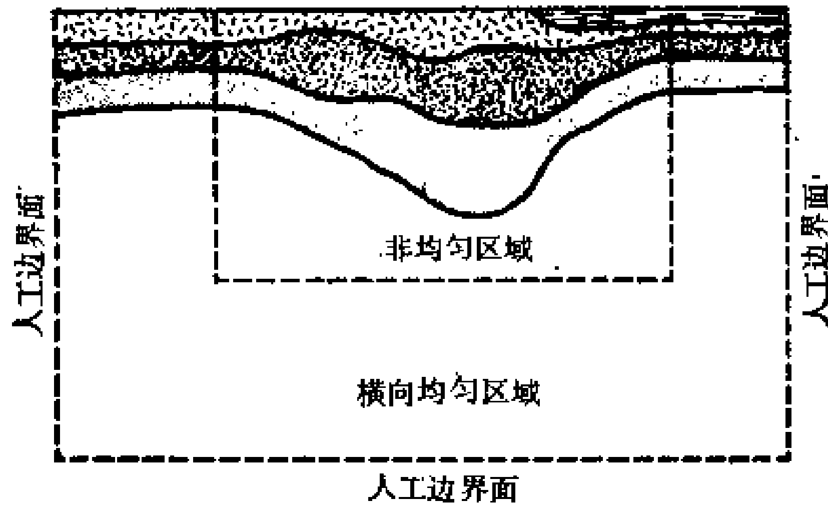


图 13.23
用有限差分法分析的非均匀区域的环境

当应力被规定在边界或分界面上时，在垂直方向上的空间导数可以作为一个条件。其导数可用前向差分(补充 13.4)近似为$(u_1—u_0)/\Delta x$，其中 0 代表边界面， 这个公式具有Δx阶的误差。此外，如果利用这个公式来测定u_0， 那么u_0显然不满足运动方程。另一个可用的办法是在这个边界面外引入一个虚平面，其解定为u_{-1}，则u_{-1}值可从其导数由二阶公式$(u_1—u_{-1})/2\Delta x$进行近似的边界条件来测定，且u_0能以适用于包括虚平面上一点的边界上的运动方程来确定。在分界面上，虚平面能够通过扩充某个或用其它介质来引入。按照 Alterman 和 Karal(1968)的工作，

给予具有较高弹性模量的介质对于计算的稳定性是十分有利的。

对于一个倾斜边界条件的公式曾由Boore(1972)详细讨论过。在一个应力和位移都连续的分界面情况下，显而易见，最好的方法应该是消去分界面，并利用像(13.138)那样的运动方程，对于一个非均匀介质，在其内部网格点上的弹性常数和密度可由围绕每一点周围适当平均来加以估算。

外面的人为边界，如图 13.23 所示的那样，将产生反射并破坏这个解，除非它是可透射的或可吸收的边界。 Smith(1974)介绍了一个消除人为边界面上反射的有意义的方法。这里我们来考虑二维 SH 波与 P-SV 波的问题。

关于 SH 波，我们对每一个边界面求两次解，其一假定应力为零，其二位移固定为零。两个解之和将不包括来自边界上的反射。理由很简单，对于应力为零的边界任何平面 SH 波位移反射系数是 1，而对于刚性边界则为 -1。

关于P波和 SV 波，对每一分界面仍然采用求解两次的方法。取质点位移和P波，SV 波的路径在 xz 平面内，且令人为边界垂直于 x 轴，我们指定人为边界面上有下述边界条件：

其一为

$$
\begin{aligned}
u &= 0, \\
\tau_{xy} &= 0,
\end{aligned}
\tag{13.161}
$$

其二为：

$$
\begin{aligned}
w &= 0, \\
\tau_{xx} &= 0.
\end{aligned}
\tag{13.162}
$$

对于入射平面P波和 SV 波，利用适当的波势(5.15)—(5.19)，能够计算边界条件为(13.161)与(13.162)的反射的P波与 SV 波。在P波入射情况下，在两组边界条件下都没有 SV 波反射。在情况(13.161)下P波反射系数为1，而在(13.162)情况下为-1。这样两个解之和将不包括来自人为边界的反射。在 SV 波入射的情况下，无反射P波，且两个问题中 SV 波反射系数符号

相反。两个解之和也并不受折射的影响。至于边界垂直于 z 轴的问题，5.3 节给出了相似的结果。

当一个以上的平面边界要求无反射时，必须增加更多的解以消去多次反射，例如，考虑在两个边界面 A 与 B 上的 SV 波反射的问题，为求每一个非反射因子，我们必须解两个边界条件为刚性或自由的问题。如果在一个问题中选择 A 为自由而 B 为刚性，而在另一个问题中选择 B 为自由而 A 为刚性，那么在 A 与 B 上多次反射的波在两个问题中将有相同的符号。若选其一为 A 与 B 都是自由的，而其二 A 与 B 都是刚性的，则将会出现同样的结果。显然，我们需要将四个问题的解求和：A 自由 B 刚性；A 自由 B 自由；A 刚性 B 刚性；A 刚性 B 自由。一般来讲，对于 n 个边界面必须求解 2^n 个问题。因此，n 很大时，Smith 的精确方法就需要占用很多计算机时间。

13.6.4 例

对具有已知解析解的问题，有限差分法已经成功地得到验证，诸如层状半空间中的一个爆炸点源（Alterman 和 karal, 1968）、通过樋口(Higuchi)介质传播的 Love 波(连结两个成层半空间的特殊情况，见问题 13.2)(Boore, 1970)、具有四分之一空间楔状介质内的一个线源(Alford et al., 1970)等等。对于没有解析解的问题，可以用诸如本章前面所描述的那些数值近似方法获得的结果，与有限差分法进行比较而得到验证。

体波

作为体波散射的一个例子，可以考虑 SH 波垂直入射在充填低速沉积物的盆地构造上引起的地震运动，如图 13.24 所示(Boore et al., 1971)。盆地有一个波长为 5 公里的全周期余弦形状(由于对称性，仅画出盆地右半边)，且最深点为 600 米。半空间内剪切波速度是 3.5 公里/秒，比沉积物中的速度高五倍。

在有限差分计算中，垂直向上传播的平面 SH 波被指定为初始条件，也作为在人为边界上后来的条件。盆地中心的位移是以

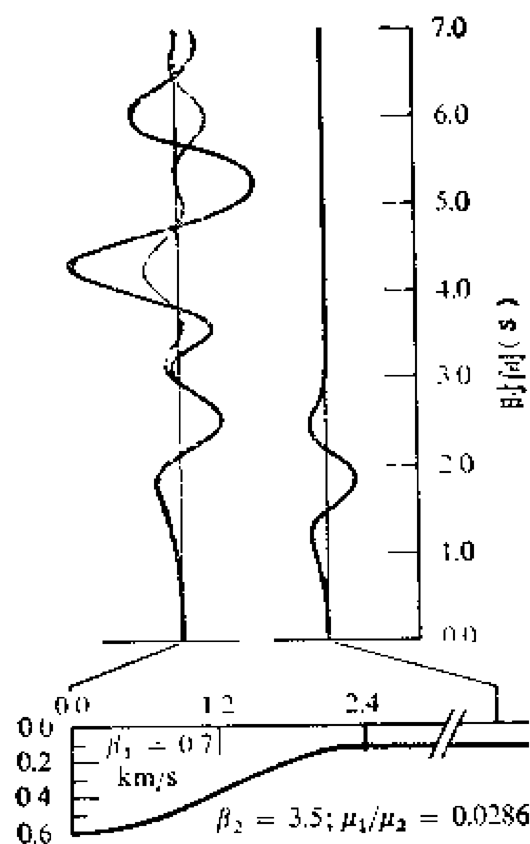


图 13.24

由垂直入射 SH 波引起的盆地构造表面上的地震运动。有限差分结果(黑线)与平行层近似结果(灰线)的比较(引自 Boore，1972)

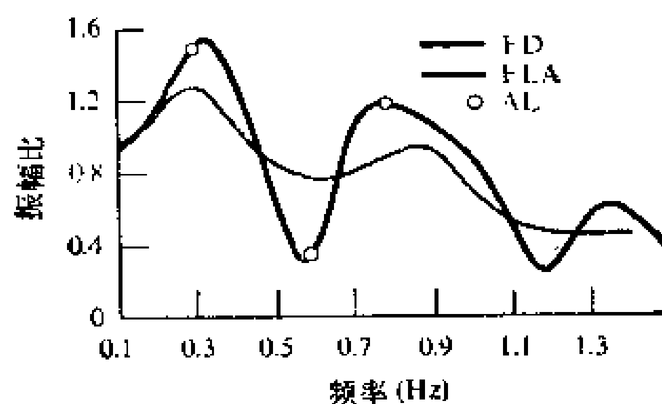


图 13.25

沉积物对表面运动的影响为频率的函数。有限差分方法（实线）与在 13.4.3节所述 Rayleigh 方法(标记为AL)十分一致。平行层近似(FLA) 表现了与它们有相当大的偏差(引自Boore，1972)

两种不同方法来计算的。黑线表示有盆地情况下的运动，是用有限差分法计算出来的。灰线表示盆地构造换成平行层时的运动，此平行层具有与观测点下盆地构造相同的速度和厚度。这些位移的Fourier变换的绝对值，在乘以一个指数窗 $e^{\varepsilon t}$ 以后（以消去所不希望有的来自人为边界上的反射），如13.25图所示。这些绝对值用对于在没有盆地情况下盆地外一表面点所计算的参考信号（如图13.24所示）的Fourier振幅进行了归一化。有限差分法计算结果与平行层近似（FLA）的结果之间有相当大的差别。此外，有限差分法与由安艺等人（Aki和Larner，1970）的方法（AL）所获结果（用圈表示）是很一致的，AL法是建立在Rayleigh初解和一个离散波数表达式[方程(13.101)]上的，Rayleigh初解和离散波数都在13.4.3节中做了详细描述。在应用AL法时，具有虚部 ε 的复数频率通常用来获得相应于时间域内指数窗的结果。两个结果的十分一致给出了用这两种方法的可靠程度。

Hong 和 Helmberger（1978）利用了一个名叫"光学"增色(Glorified Optics)的方法，研究了类似盆地的问题。此方法建立在适应非平面构造内波传播的广义射线理论基础上。利用高频近似成立情况下所计算的多次反射路径合成地震图与用有限差分法和有限元法所得结果十分一致，见图13.26。在这个图中，我们附加了由P. Y. Bard和M.Bouchon利用离散波数方法（DW）计算的合成地震图，它是由用AL方法所获得的结果经Fourier变换合成的。当用DW方法时，有限差分法（FD）和有限元法所得结果是很一致的。光学增色法(GO)与其它方法在早期到达部分上相当一致，但在后至部分却有一定程度的偏离。GO方法在频率越高时越有效，因为此时其它方法就变得费时间了。

面波

作为有限差分法计算面波散射的例子，让我们来考虑一个倾斜的层状介质的Love波问题，如图13.27所示。该图可以粗略地代表从海洋到大陆构造的过渡地带。Boore（1970）计算了

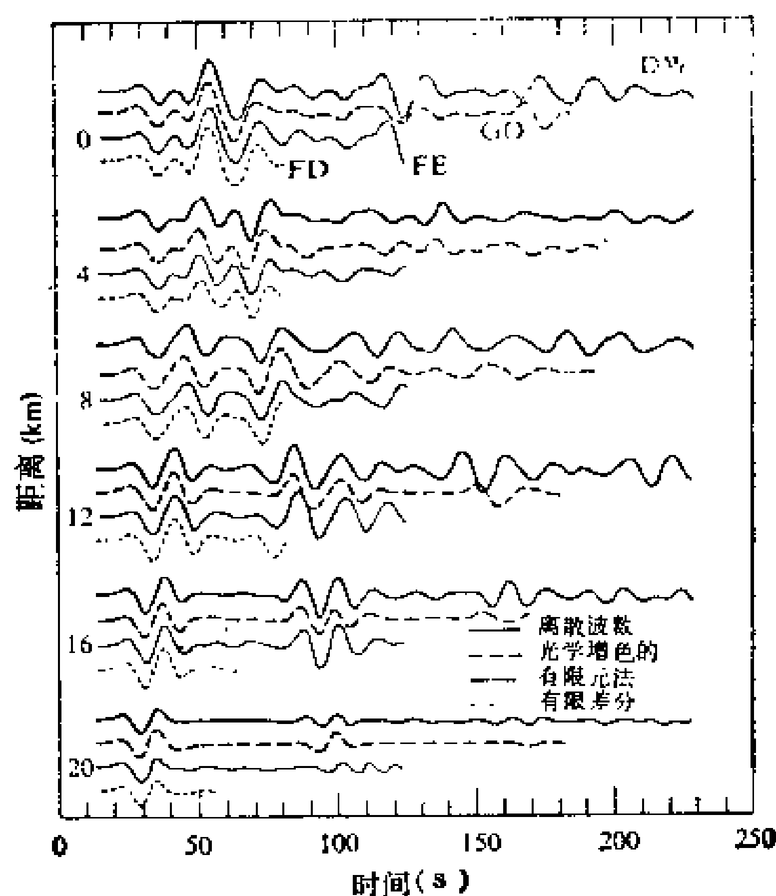


图 13.26

*SH*波从半空间中垂直入射到盆地构造时，用不同方法计算的地面运动合成地震图。盆地形状和速度与图 13.24 所示的相同。唯一的差别在于，时间及距离比例尺比图 13.24 均大 10 倍。*SH*位移是从盆地中心（0 公里）到水平距离为20 公里处等间隔地计算出来的。这个图根据从Hong与Helmberger(1978) 的资料改编的，并包括了使用DW方法所得的结果

Love波从左或从右入射时过渡带表面上几个点的运动。入射Love波的空间-时间函数是通过本征函数的Fourier合成来计算的，以给出在表面上所要求的波形。有几种不同方案用于使用有限差分近似倾斜分界面上的边界条件。

为测量过渡带上的相速度（见第十一章），对地表面台站计算的记录图做 Foarier 变换，而相速度是用角频率乘以两个台间传播距离，再除以传播过程中Fourier 相位的增量得出的。所

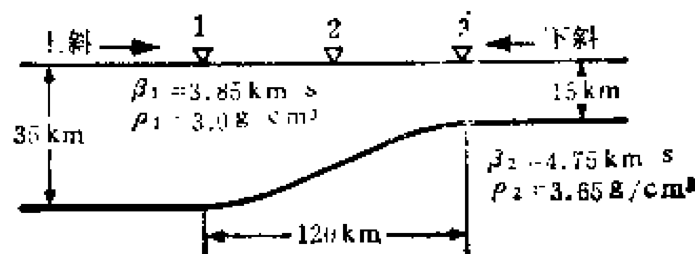


图 13.27
大陆-海洋过渡带模型（引自Boore，1972）

表示的合成相速度曲线是当入射波从厚地壳到达（上倾情况）及从薄地壳到达（下倾情况）的两种情况。我们发现对这两种情况有一显著差别，如图 13.28 所示。在上倾情况下所测相速度要高于下倾情况下测量的结果。让我们来看看其它近似方法是否也给出相似的视相速度的各向异性。

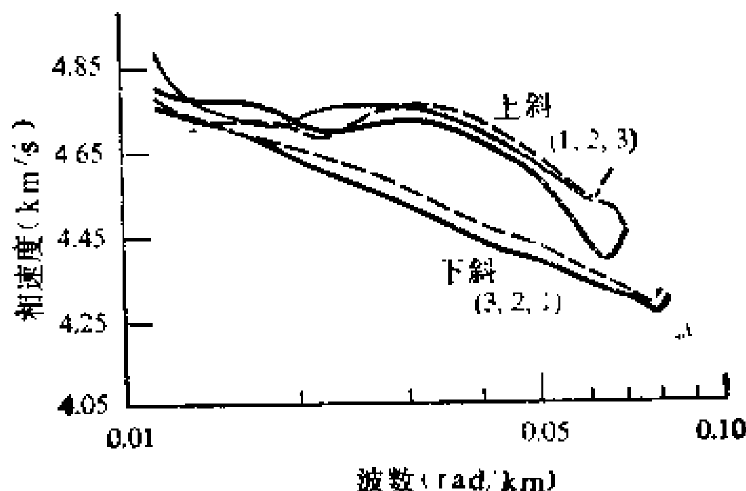


图 13.28
横跨如图13.27 的大陆-海洋过渡带模型向两个方向传播的Love 波，利用有限差分解所测得的相速度。三条不同的上倾曲线及两条不同的下倾曲线，是由横跨界面边界条件的变化而生成的。对每个传播方向，结果是相似的，这有力地表明，相速度的各向异性是实在的，并非只是数字上的结果（引自Boore，1972）

Alsop 为解决面波问题提出了一个类似于前面体波例子中所用的Rayleigh初解的探讨方法。考虑两个1/4半空间在垂直平面

上熔接的情况。每一个 1/4 半空间都是水平的层状介质。这个想法是利用把 1/4 空间想像为半空间时的简正振型的线性组合作为 1/4空间内的初解（试验解），并根据在垂直内界面上满足连续性条件来确定线性系数。如果对一组有限数目的非漏能简正振型连续性条件得到满足，则这个想法是完善的，正如前面曾引用过的槛口介质中所示那样。此介质由两个 1/4 空间所组成，每一个这样的空间有一个覆盖在均匀半空间上的等厚度均匀层。这两层及两个半空间的刚度和密度参数被限制，使得基频 Love 波振型本征函数的形状，对两个 1/4 空间来讲是一致的。在这种情况下，横跨垂直分界面上牵引力和位移的连续性可简单地由包括由于原生波入射到 1/4 空间所反射的 Love 波和透射到另一 1/4 空间内的 Love波所满足。

但是，对更一般的情况而言，利用简正振型线性组合来满足连续性条件是困难的，因为如 7.1 节所示，对于一个成层半空间问题，在给定频率上只有有限个简正振型。

如果我们在半空间内一定深度上引入一个刚性底，以这种方法能获得一个完全解。这样，介质在垂直方向上就变成是有限的，所有振型也变成非漏能式的了，且可以把一个任意的运动描述成为一个简正振型的线性组合。Lysmer和Drake（1972）研究了由夹在两个不同的、具有下界为刚性层状 1/4 空间的过渡带组成的介质。他们把有限元方法(Zienkiewicz and Cheung，1968)应用于通过这样一个介质的 Rayleigh 型简正振型的传播，且在时间域内获得的总运动也同样分解成简正振型了。在过渡带上部对一个分离振型测出的相速度不管是从过渡带左边还是从右边入射都是相同的。但是就整个运动所测量出的相速度与 Boore 所求得的结果，都显示出同样的各向异性。

建议进一步阅读的文献

Boore, D M. Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Seismic Waves and Earth Oscillations* (Methods in *Computational Physics*, Vol. 11). New York: Academic Press, 1972.

Chernov, L. A. *Wave Propagation in a Random Medium*. New York: McGraw-Hill. 1960.

Claerbout, J. F. *Fundamentals of Geophysical Data Processing With Applications to Petroleum Prospecting*. New York: McGraw-Hill, 1976.

Davies, D., and R. M. Sheppard. Lateral heterogeneity in the earth's mantle. *Nature*, **239**, 318—323, 1972.

Flatté, S. M., R. Dashen, W. H. Munk, K. M. Watson, and F. Zachariasen. *Sound Transmission Through a Fluctuating Ocean*. Cambridge University Press, 1979.

Haddon, R. A. W., and J. R. Cleary. Evidence for scattering of seismic PKP waves near the mantle core boundary. *Physics of the Earth and Planetary Imeriors*, **8**, 211—234, 1974,

Hudson, J. A. Scattered waves in the coda of P. *Journal of Geophysics*, **43**, 359 -374, 1977.

Julian, B. R., and M. K. Sengupta, Seismic travel time evidence for lateral inhomogeneity in the deep mantle. *Nature*, **242**, 443—447, 1974.

Landers, T., and J. F. Claerbout. Numerical calculations of elastic waves in laterally inhomogeneous media. *Journal of Geophysical Research*, **77**, 1476, 1482, 1972.

McDaniel, S. T. Parabolic approximations for underwater sound propagation. *Journal of the Acoustical of America*, **58**, 1178—1185, 1975.

Smith, W. D. The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **42**, 747—768, 1975.

Tatarski, V. I. *Wave Propagation in a Turbulent Medium.* New York: McGraw-Hill, 1961.

Tolstoy, I., and C. S. Clay. *Ocean Acoustics.* New York: McGraw-Hill, 1966.

Zienkiewicz, O. C. *The Finite Element Method in Engineering Science.* New York: McGraw-Hill, 1971.

问　　题

13.1 挑出一个你所感兴趣的地球内非均匀地带，例如核-幔边界，地幔内的过渡带，低速层，下沉岩石圈，洋中脊，大陆海洋边界，山麓，火山地区的岩浆囊。假定这些非均匀区域除了你所挑出的那个外，对地震图没有影响。用你所喜欢的任何一种方式选择地震震源、接收器与频率范围设计实验。在问题中要包含以下五个长度：

(1) 非均匀带大小。

(2) 波长或非均匀范围。

(3) 地震波波长。

(4) 从非均匀带到台站的距离。

(5) 从震源到非均匀区域的距离。

讨论什么样的数学模型和什么样的近似方法适合于分析从所给定实验得到的观测。这种分析方法适合于取决于上述五种长度相对大小的特定实验（参考图13.11)。对于给定的"非均匀区域"，在分析所需的计算机时间，预期的分辨率以及结果的精确度，考虑怎样的实验最有效（选择源、台站、波长)?

13.2 考虑一个由垂直平面划分开的覆盖在半空间上的单层。在

垂直平面的一边，剪切波速度与刚度对该层为β_1，μ_1，而对半空间是β_2，μ_2。在另外一边，它们是β_3，μ_3与β_4，μ_4。两边的层厚度相等。樋口（Higuchi，1932）证明，如果下述条件

$$\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{\beta_2^2}=\frac{1}{\beta_3^2}-\frac{1}{\beta_4^2}$$

与

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\mu_3}{\mu_4}$$

得到满足，则从垂直平面法线方向入射的平面Love波只产生反射和透射Love波，而没有振型转换或体波散射。对于在其表面上的位移，测定反射和透射系数。

13.3　设在速度为$c=c(\mathbf{x})$的介质内，A，B两点间射线路径是已知的，现假设有一个轻微的速度扰动$\delta c(x)$后引入介质。那么A与B之间的最初的走时

$$T=\int_A^B\frac{ds}{c(\mathbf{x})}\ （沿射线路径）$$

受两个方面的影响。1. 被积函数变成$1/(c+\delta c)$；2. 射线路径本身稍微有点改变。按照Fermat原理，可证明速度扰动对T的影响（一阶的）由下式给出：

$$\delta T=-\int_A^B\frac{\delta c\,ds}{c^2},$$

式中积分路径是初始的射线路径。[这个结果可用来获得因地球椭圆造成的走时改正。Dziewonski和Gilbert（1967）给出了扼要的结果。]

13.4　对于非均匀性规模长度为a的介质，直观地描述出为什么在$a\to 0$和$a\to\infty$的两种极限情况下，散射都趋于零。

第十四章　震源运动学

在第二章2.5节和第三章中，我们研究了地震震源，为的是能够着手确定地震学中需要什么样的波传播理论。在完成了波传播理论的研究之后（第四章到第九章，第十三章），现在我们回过来更透彻地研究地震震源。在各种能产生地震波的震源(爆炸、快速相变等）中，我们将主要研究那种在一个面（断层平面）上发生剪切运动的震源。在3.1节中已证明，如果断层面上的位移间断为断层上的位置和时间已知函数，那么整个介质的运动就完全确定下来了。这是一个重要的运动学结论（见补充5.3），因为在实践中，它使我们能够按断层面上的质点运动来解释观测到的从震源区辐射出来的运动。作为本章的主要课题，我们将描述就地震震源运动的运动学面言，从远场和近场观测中可能了解到哪些知识。

为了了解在震源区实际发生的物理过程，必须研究应力与物质性质的关系，即，应力一直在缓慢上升（由于长期构造作用结果），以致超过震源区内物质的强度，形成物质破坏的成核或扩展（例如，在一断层平面上）从而迅速消除上述应力。这是一个动力学问题，而且是一个非常困难的问题，我们将在下一章处理。但我们现在阐述断层运动的运动学时，在某种程度上引入断层作用是一个剪切破裂过程的约束条件。

我们的出发点是第三章的表示定理[方程(3.2)]。不考虑体力和应力的间断性，在一个分界面Σ两侧的位移间断$[\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi},\tau)]$所引起的弹性位移$\mathbf{u}$具有如下分量：

$$u_n(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{\Sigma}\int[u_i(\boldsymbol{\xi},\tau)]c_{ijpq}G_{np,q}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)\nu_j d\Sigma(\boldsymbol{\xi}),$$

(14.1)

式中，c_{jkpq} 是在方程（2.18）中定义的弹性常数；$G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ 是 2.4 节中定义的 Green 函数；$\boldsymbol{\nu}$ 是如图 3.1 所示与Σ正交的矢量；而 $G_{ip,q}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ 是 G_{ip} 对于 ξ_q 的导数。在一个均匀、各向同性、无限介质内，Green 函数能够明确地表示出来。利用（2.37）和（4.23），取体力为单位脉冲，得出：

$$G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_p - \delta_{ip})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} t'\delta(t-\tau-t')dt'$$
$$+\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_p\frac{1}{r}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{\alpha}\right)$$
$$-\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\gamma_i\gamma_p-\delta_{ip})\frac{1}{r}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{\beta}\right),\tag{14.2}$$

式中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是从震源点 ξ 到接收点 $\mathbf{x}$ 的单位矢量，而 $r=|\mathbf{x}-\xi|$ 是两点间距离。

14.1 远场地震运动学

在均匀、各向同性、无界介质内，我们将获得产生断层时远场 P 波和 S 波的位移波形公式。并将利用射线理论把这一结果推广到在非均匀介质中的断裂问题。在概括这些波形的若干一般性质后，将着重考虑它们的低频分量。然后在单向传播情况下，我们研究由五个参数表征的震源波形，这五个参数是：断层长度；断层宽度；破裂速度（包括方向）；最后的水平错距；及"上升时间"。这个上升时间系指断层上某一点发生水平错动达到最后数值所经历的时间。这五个简单的表示特征的参数往往足以解释有限源产生的波。若什么地方解释不充分，或需要更详细地描述断层的运动时，接下来的步骤是分析断层运动的不同的阶段，例如，运动成核现象，破裂的扩展和运动的终止。我们将描述几个这些阶段的例子，最后通过中频和高频成分分析远场波形。

14.1.1 均匀、各向同性、无界介质内观测到的远场位移波形

均匀、各向同性、无界介质是所研究的一种简单情况，选择这样的介质是为了使路径影响的复杂性减到最小。

如果接收器位置 x 离断层面 Σ 上所有的点 ξ 足够远，那么在 Green 函数(14.2) 内仅有远场项是有意义的。公式 (14.1) 在对 τ 积分后，得到远场位移

$$
\begin{aligned}
u_i(\mathbf{x},t) = & -\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\partial}{\partial x_q}\iint_{\Sigma} c_{jkpq}\frac{\gamma_i\gamma_p}{r}\left[u_j\left(\boldsymbol{\xi},t-\frac{r}{\alpha}\right)\right]\nu_k d\Sigma \\
& +\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}\frac{\partial}{\partial x_q}\iint_{\Sigma} c_{jkpq}\left(\frac{\gamma_i\gamma_p-\delta_{ip}}{r}\right) \\
& \times\left[u_j\left(\boldsymbol{\xi},t-\frac{r}{\beta}\right)\right]\nu_k d\Sigma,
\end{aligned}
\tag{14.3}
$$

这里我们已经利用了关系式 $\partial/\partial\xi_q=-\partial/\partial x_q$，它可对 γ 和 r 这样的量进行运算，它仅取决于 x 和 $\boldsymbol{\xi}$ 间的差。在对 x_q 求导后，略去所有比 r^{-1} 衰减更快的项，得到

$$
\begin{aligned}
u_i(\mathbf{x},t)\text{的远场} = & \iint_{\Sigma}\frac{c_{jkpq}}{4\pi\rho\alpha^3 r}\gamma_i\gamma_p\left[\dot{u}_j\left(\boldsymbol{\xi},t-\frac{r}{\alpha}\right)\right]\frac{\partial r}{\partial x_q}\nu_k d\Sigma \\
& -\iint_{\Sigma}\frac{c_{jkpq}}{4\pi\rho\beta^3 r}(\gamma_i\gamma_p-\delta_{ip}) \\
& \times\left[\dot{u}_j\left(\boldsymbol{\xi},t-\frac{r}{\beta}\right)\right]\frac{\partial r}{\partial x_q}\nu_k d\Sigma.
\end{aligned}
\tag{14.4}
$$

显然，式中第一项相当于 P 波，而第二项相当于 S 波。注意 $\partial r/\partial x_q$ 的结果是 γ_q。

与断层面 Σ 线性尺度相比，如果台站足够远的话，那么完全可以假定距离 r 和方向余弦 γ_i 近似为常数，而与 $\boldsymbol{\xi}$ 无关，这样就能够把变化缓慢的因子拿到积分号之外。为了简单起见，我们进一步假设断层面是个平面，断层上各点位移不连续的方向都是相同的。写成

$$[u_j(\boldsymbol{\xi},t)] = n_j \cdot \Delta u(\boldsymbol{\xi},t), \qquad (14.5)$$

其中 Δu 是一个标量函数，我们称它为“震源函数”，或是剪切断层情况下的“滑动函数”。在这些假定之下，方程（14.4）简化为

$$u_i(\mathbf{x},t)\text{的远场} = \frac{\gamma_i}{4\pi\rho\alpha^3 r} \cdot c_{jkpq}\gamma_p\gamma_q\nu_k n_j \cdot \iint_{\Sigma} \Delta\dot{u}$$

$$\times\left(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{r}{\alpha}\right)d\Sigma - \frac{\delta_{ip} - \gamma_i\gamma_p}{4\pi\rho\beta^3 r} \cdot c_{jkpq}\gamma_q\nu_k n_j \cdot \iint_{\Sigma} \Delta\dot{u}$$

$$\times\left(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{r}{\beta}\right)d\Sigma. \qquad (14.6)$$

由于 P 波和 S 波来自同一个地震震源，利用上述方程可对远场位移做出非常简单的解释。因为 $\gamma_i\gamma_i = 1$ 及 $\gamma_i(\delta_{ip} - \gamma_i\gamma_p) = 0$，立即看出与 P 波对应的质点运动平行于 $\boldsymbol{\gamma}$，而 S 波的垂直于 $\boldsymbol{\gamma}$。波的振幅随着距离以 r^{-1} 衰减，且与它们的传播速度的三次方成反比。由于它们之间的其它因子是可以比较的，所以 S 波振幅大致较 P 波振幅大 $\alpha^3/\beta^3(\sim 5)$ 倍。

因子 $(c_{jkpq}\gamma_p\gamma_q\nu_k n_j)$ 表示 P 波的辐射图案，它由断层平面 (ν_k) 的取向、位移间断 (n_j) 和从断层到台站 (γ_p) 的方向等决定。同样，取 γ' 和 γ'' 为垂直于 γ 平面的单位正交矢量，S 波的辐射图案由在 γ' 方向上的振幅 $(c_{jkpq}\gamma'_p\gamma_q\nu_k n_j)$ 和在 γ'' 方向上的振幅由 $(c_{jkpq}\gamma''_p\gamma_q\nu_k n_j)$ 来描述。两个方向间的相对振幅决定了 S 波的偏振振幅，它已经广泛地用作以 P 波初动求断层面解的补充资料。

最后，P 波和 S 波的位移波形由一个简单的积分式来描述：

$$\Omega(\mathbf{x},t) = \iint_{\Sigma} \Delta\dot{u}\left(\boldsymbol{\xi}, t - \frac{r}{c}\right)d\Sigma, \qquad (14.7)$$

式中 c 为波传播速度。

14.1.2 利用几何扩散近似公式研究非均匀各向同性介质的远场位移波形

在第四章，方程（4.79)—(4.81）是我们假定整个断层（面积为 A）等效为一个点源的条件下获得的 $\mathbf{x}$ 处的远场位移。当所关心的波长较断层尺度大很多，而又比震源区到接收点的距离小很多时就是这种情况。应当强调的是，在 14.1 节中我们所关心的是波长与断层尺度都是可相比较（可能波长还略小一点）的情况，以致从断层表面不同部位所辐射的波之间产生干涉。另一个获得远场位移波形（14.4）的方法是对 P 波利用（4.79）而对 S 波利用（4.80），计算每个面元 $d\Sigma$ 的贡献，然后把断层表面的不同部位至 $\mathbf{x}$ 的不同走时考虑进去求积。例如，对 P 波，现在利用 $[\dot{\mathbf{u}}]\,d\Sigma$ 代替 $\dot{\bar{\mathbf{u}}}A$，从（4.79)得知：

远场 P 波的 $\mathbf{u}_i(\mathbf{x},t)$

$$=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}\iint_\Sigma 2\mu\frac{\gamma_i\gamma_j}{r}\left[\dot{u}_j\left(\boldsymbol{\xi},t-\frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}{\alpha}\right)\right]\gamma_k\nu_k d\Sigma(\boldsymbol{\xi}),\quad(14.8)$$

它刚好与（14.4）中 P 波分量相同，因为对于在各向同性介质内的滑动 $c_{jkpq}[\dot{u}_j]\gamma_q\nu_k=2\mu\gamma_j[\dot{u}_j]\gamma_k\nu_k$。

这个办法的优点在于它能够很容易地推广到非均匀介质的情况，因为在第四章中我们确认远场近似与几何扩散近似是等同的，在方程（4.88)—(4.90）中，我们给出了在一个有限断层面上积分的波积函数。对非均匀介质，广义的（14.6）P 波分量方程是：

远场 P 波 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$

$$=\frac{\mathbf{l}\mu(\boldsymbol{\xi}_0)\mathscr{F}^P}{4\pi\rho^{1/2}(\boldsymbol{\xi}_0)\rho^{1/2}(\mathbf{x})\alpha^{5/2}(\boldsymbol{\xi}_0)\alpha^{1/2}(\mathbf{x})\mathscr{R}^P(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_0)}\iint_\Sigma\Delta\dot{u}[\xi,t-T^P(\mathbf{x},\xi)]\,d\Sigma,\quad(14.9)$$

其中 $\mathbf{l}$（来自 $\boldsymbol{\xi}$ 的射线在 $\mathbf{x}$ 处的方向），$\mathscr{F}^P$（辐射图案）和 $\mathscr{R}^P$（几何扩散因子）是对在 Σ 上给定的参考点 $\boldsymbol{\xi}_0$ 求值的。类似于（14.9)，可以从（4.89)—(4.90）直接写出 SV 与 SH 的波形公式。

14.1.3 远场位移波形的一般特性

为表达方便，将继续使用均匀介质来发展这一理论，在补充14.1中给出的例子将说明我们的震源理论与关于实际介质的波传播理论如何才能归并。

取断层上一参考点为坐标原点，面元 $d\Sigma$ 和接收点 $\mathbf{x}$ 之间的距离 r 可写成

$$
\begin{aligned}
r &= r_0\left[1+\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{r_0^2}-\frac{2(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{r_0}\right]^{1/2} \\
&= r_0\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{r_0^2}-\frac{2(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{r_0}\right]-\frac{1}{8}[\quad]^2\cdots\right\} \\
&= r_0-(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})+\frac{1}{2}\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{r_0}-\frac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})^2}{2r_0}+\cdots, \qquad (14.10)
\end{aligned}
$$

式中 r_0 是从原点到接收点的距离，$r_0=|\mathbf{x}|$，γ 是指向接收点的单位矢量，$\boldsymbol{\xi}$ 是从原点到 $d\Sigma$ 的位置矢量（图 14.1）。

因为 r_0 大到可与 Σ 的线性尺度相比，我们可以把方程(14.10)近似为

$$r \sim r_0-(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma}). \qquad (14.11)$$

由于这种近似而引起的路径长度的误差 δr，可以用方程(14.10)的级数展开略去高次项后来衡量，即，

$$\delta r=\frac{1}{2r_0}[|\boldsymbol{\xi}|^2-(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})^2].$$

如果这个误差等于或大于四分之一波长 $\lambda/4$，积分结果将引入很大的误差。所以，用方程（14.11）来近似时只有当

$$\frac{1}{2r_0}[|\boldsymbol{\xi}|^2-(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})^2]\ll\frac{\lambda}{4}$$

时才是正确的。或者，保守些，

$$L^2\ll\frac{\lambda r_0}{2}, \qquad (14.12)$$

这里 L 是在 Σ 上 $|\boldsymbol{\xi}|$ 的最大值。这与光学中满足 Fraunhofer 衍射区域的条件是相同的。为了进行比较，注意在第四章中假定的

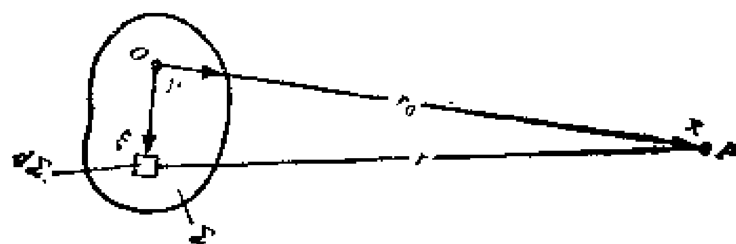


图 14.1
在一有限断层面上取坐标原点

条件，即整个断层可视为一个点源，相当于$L\ll\lambda$，在可适用的频率范围内，这个条件比（14.12）要严格得多，我们可以把方程（14.7）中所给位移波形改写为

$$\Omega(\mathbf{x},t)=\iint_{\Sigma}\Delta\dot{u}\left[\boldsymbol{\xi},t-\frac{r_0-(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{c}\right]d\Sigma. \qquad (14.13)$$

取上述方程关于t的 Fourier 变换，得到

$$\Omega(\mathbf{x},\omega)=\iint_{\Sigma}\Delta\dot{u}(\boldsymbol{\xi},\omega)\exp\left\{i\omega\frac{[r_0-(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})]}{c}\right\}d\Sigma$$

$$=\exp\left(i\omega\frac{r_0}{c}\right)\iint_{\Sigma}\Delta\dot{u}(\boldsymbol{\xi},\omega)\exp\left[-i\omega\frac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{c}\right]d\Sigma,$$

式中$\Omega(\mathbf{x},\omega)$与$\Delta\dot{u}$（$\boldsymbol{\xi},\omega$）分别为$\Omega(\mathbf{x},t)$和$\Delta\dot{u}(\boldsymbol{\xi},t)$的Fourier变换。

以上方程表明，由于传播所引起滞后$\omega r_0/c$而做相位改正的位移观测波形，其 Fourier 变换可表示为平面波之迭加：exp$[-i\omega(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})/c]$。

$$\Omega(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega r_0/c}=\iint_{\Sigma}\Delta\dot{u}(\boldsymbol{\xi},\omega)\exp[-i\omega(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})/c]d\Sigma. \qquad (14.14)$$

上述方程右边在空间上具有双重 Fourier 变换的形式：$\iint_{\Sigma}\Delta\dot{u}(\boldsymbol{\xi},\omega)\exp[-i(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{k})]d\Sigma$。若这一变换在二维波数空间内对所有

的 k 都是已知的话，则可以从远场观测中完全地确定 $\Delta\dot{u}(\xi,\omega)$。疑憾的是，正如在（14.14）中所表明的，只有 $\omega\gamma/c$ 在 Σ 上的投影才是已知的。因为 γ 是一个单位矢量，从远场观测中我们能重新复原的 k 的范围被限制在 $|k|\leqslant\omega/c$ 内。换言之，我们不能详细研究震源长度比所观测到的最短的波长更短的震源。这是因为只有具有比介质速度 c 大的相速度（沿平面 Σ）$\omega/|k|$ 的波才可以辐射到远场。相速度小于 c 的波是在 Σ 附近被捕获的非均匀波。我们在 14.2.3 和 14.2.4 节将进一步探讨。在此，我们注意到为了使源函数 $\Delta u(\xi,t)$ 完全复原，需要进行近场观测。

14.1.4 低频地震波谱的特性

当频率 ω 接近于零时，远场位移波形的 Fourier 变换 $\Omega(\mathbf{x},\omega)$ 接近一个常数值：

$$\Omega(\mathbf{x},\ \omega\to 0)=\iint_{\Sigma}\Delta\dot{u}(\xi,\omega\to 0)d\Sigma.$$

因为

$$\Delta\dot{u}(\xi,\ \omega)=\int\Delta\dot{u}(\xi,\ t)\exp(i\omega t)dt$$

且

$$\Delta\dot{u}(\xi,\ \omega\to 0)=\int\Delta\dot{u}(\xi,\ t)dt=\Delta u(\xi,\ t\to\infty),$$

得到

$$\Omega(\mathbf{x},\omega\to 0)=\iint_{\Sigma}\Delta u(\xi,t\to\infty)d\Sigma.$$

从而 $\Omega(\mathbf{x},\ \omega\to 0)$ 接近一个常数，它等于断层区上最后滑动的积分。换言之，这场位移波形的波谱(Fourier 变换的绝对值)在低频区域变得很平坦，它的高度正比于由方程(3.16)所定义的地震矩。这个结果对任何 $\Delta u(\xi,\ t)$ 都是正确的，因此它与断层面破裂过程的细节无关。

如果我们做另外一种假设：断层滑动决不改变其方向(即 $\Delta\dot{u}$ 在地震时不改变符号——假使在 $\Delta\dot{u}=0$ 时产生巨大的静摩

擦，这一假定就是合理的），那么，从方程(14.13)，我们发现$\Omega(x, \omega)$对于所有t将有相同的符号，在那种情况下，Fourier变换$\Omega(x, \omega)$在$\omega=0$时有极大值。这样一个与断层作用细节仍然无关的结果已经被Savage(1972)，Molnar，Jacob，和McCamy(1973)以及Randall(1973)在由Archambean(1968)引起的关于低频地震波谱性质的争论中指出来了。

如果断层面面积Σ无限小，而其滑动$\Delta u(\xi, t)$在时间上以阶梯函数变化，那么由方程（14.13）可发现远场波形是个δ函数，其波谱在整个频率范围内都是平坦的。所以，可以说对于低频来讲其波谱是平的，其地震震源等价于一个以阶梯函数滑动的点源。这个简单的震源模型已广泛地应用在使用单台法测定较小地震Love波和Rayleigh波的相速度。对于大西洋路径，Weidner（1972）把用单台法和用双台法测得的结果进行了对比，发现对于6级或小一些的地震，当周期为20—80秒、相位误差小于0.02—0.1周时，阶梯函数的假定才是正确的。同样的假定也被成功地用来通过Rayleigh波相位（Weidner and Aki，1973）与振幅（Tsai and Aki，1971），求出震级小于6级的地震震源深度。Mendiguren（1972）利用周期范围为150—1200秒的自由振荡数据求得的哥伦比亚的一个深震结果支持了阶梯函数的假设。金森等（Kanamori and Anderson，1975）汇总了不同震级的许多地震的断层面积和地震矩的测量结果。

14.1.5. 单向传播的断层模型

如前节所述，仅靠远场观测的波形不能唯一地确定震源函数$\Delta u(\xi,t)$。在这种情况下，引入少量能够适当描述震源函数的震源参数是很重要的。然后，在远场那些有限的观测才能有效地用来测定这些参数。

首先，让我们把断层面看成一个长为L宽为W的长方形。破裂从长边的一端开始，并沿长边以速度v传播。令坐标系(ξ_1,ξ_2)平行于图14.2内所示的断层面的长和宽，规定破裂的传播为

$$\Delta u(\xi,t) = f(t-\xi_1/v) \quad 0<\xi_1<L, 0<\xi_2<W,$$
$$= 0 \quad \xi_1<0, \xi_1>L, 0<\xi_2<W, \quad (14.15)$$
$$= 0 \quad \xi_2<0, \xi_2>W.$$

代入方程(14.13)，得

$$\Omega(\mathbf{x},t) = \int_0^W \int_0^L \dot{f}\left(t-\frac{r_0}{c}-\frac{\xi_1}{v}+\frac{\xi_1\gamma_1+\xi_2\gamma_2}{c}\right)d\xi_1 d\xi_2. \quad (14.16)$$

假设W和$\xi_2\gamma_2$是小量，取Ψ为破裂传播方向与到接收点方向间的夹角，可以将方程(14.16)改写为

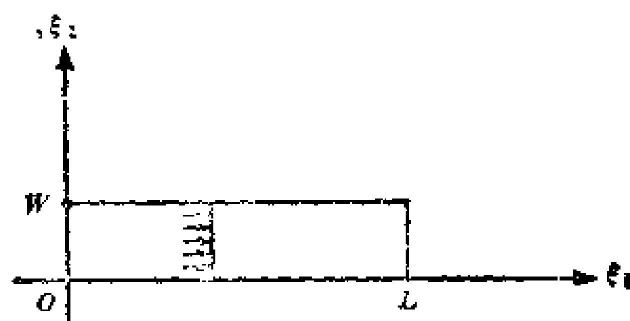
$$\Omega(\mathbf{x},t) = W\int_0^L \dot{f}\left[t-\frac{r_0}{c}-\xi_1\left(\frac{1}{v}-\frac{\cos\Psi}{c}\right)\right]d\xi_1. \quad (14.17)$$

本质上这是在时间间隔$L[1/v-(\cos\Psi)/c]$上$\dot{f}(t-r_0/c)$的滑动平均。由于$\dot{f}(t-r_0/c)$是对一个无限小断层所预期的远场位移波形，我们看到在一个有限长度断层上破裂传播对波形有一个平滑效果。

为了求出对波谱的这种影响，取（14.7）的 Fourier 变换。将$f(t)$的 Fourier 变换改写为$f(\omega)$，得到

$$\Omega(x,\omega) = -i\omega W f(\omega)e^{i\omega r_0/c}\int_0^L \exp\left[i\omega\xi_1\left(\frac{1}{v}-\frac{\cos\Psi}{c}\right)\right]d\xi_1$$
$$= \omega f(\omega) WL\frac{\sin X}{X}\exp\left[i\left(\frac{\omega r_0}{c}-\frac{\pi}{2}+X\right)\right], \quad (14.18)$$

式中$X=(\omega L/2)[1/v-(\cos\Psi)/c]$。断层有限性对振幅谱的影响表示为$X^{-1}\sin X$，它由图 14.3 描绘出来。这种影响在$X=\pi$，$2\pi$，…时产生结点，它首先由 Ben-Menahem(1961)做了讨论。第一个结点相当于周期$2\pi/\omega=L\left[\frac{1}{v}-(\cos\Psi)/c\right]$。观测到的波谱结点的例子如图 14.4 所示，它给出了在加利福尼亚伯克利观测到的 1966 年 6 月帕克菲尔德地震的 Love 波（Filson 与 McEvilly,1967)。在$T=22.5$秒上的第一个结点可用破裂速度



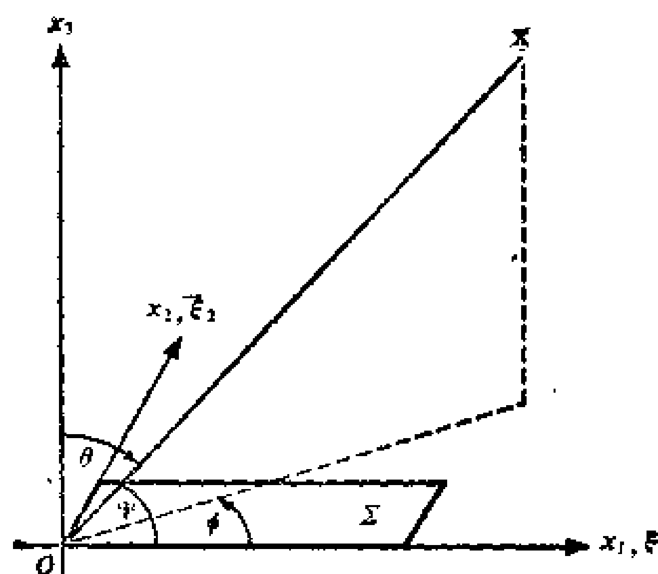


图 14.2

长方形断层上的单向断裂。(a) 断层平面。(b) 方向 $\theta=0$ 垂直于断层平面，而 $\Psi=0$ 是破裂传播方向

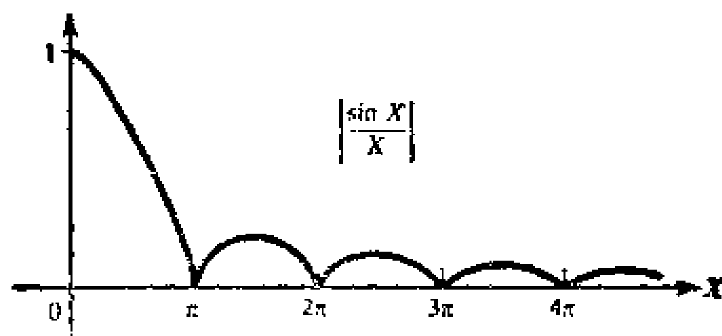


图 14.3

在观测到的脉冲波形的波谱中，因子 $|X^{-1}\sin X|$ 可认为是在时间域内和具有瞬态持续时间 $L\,(1/v-c^{-1}\cos\Psi)=L[1/v-c^{-1}\,(\sin\,\theta\cos\,\phi)]$ 的箱形函数的褶积。这就是沿方向 (θ,ϕ) 的接收器所检测到的破裂的视持续时间，其中破裂速度为 v，波传播速度为 c

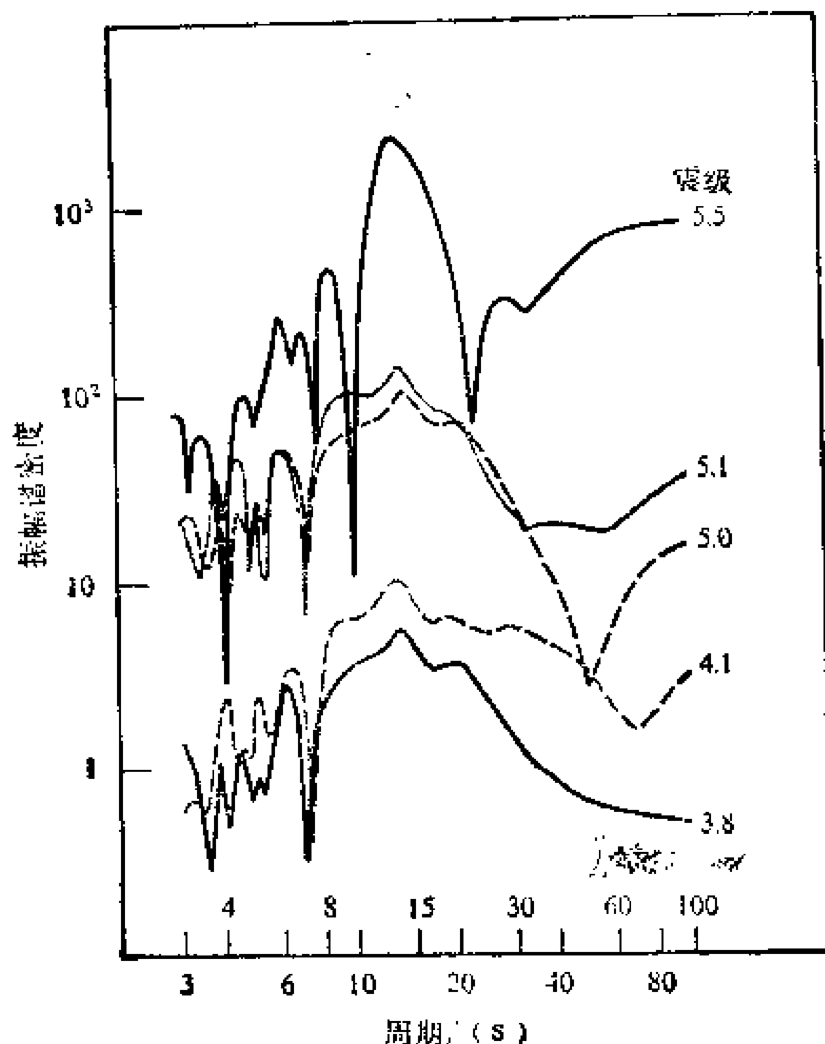


图 14.4

在加利福尼亚伯克利记录到的帕克菲尔德地震系列 Love 波的振幅谱，震中距离 270 公里，主震的地方震级为 5.5（$M_s=6.4$）。图中显示在 22.5，9.8 和 7.6 秒时有结点。最后的结点可能是路径影响，因为它对所有地震都有显示，却与震级无关（引自 Filson and McEvilly,1967）

为 2.2 公里/秒、破裂长度为 30 公里左右而 $\cos\Psi$ 大约是 1 来解释。

对于更高的频率，$X^{-1}\sin X$ 的包络正比于 ω^{-1}。这种平滑的效果，在破裂传播方向上（$\Psi=0$）最弱，但在其反方向上（$\Psi=\pi$）最强。因此，在 $\Psi=0$ 处我们观测到高频波比在 $\Psi=\pi$ 处要

多。这个效果与把运动振荡器的频率从 ω 移动到 $\omega[1-(v/c)\times(\cos\Psi)]^{-1}$ 的 Doppler 效应相似。在我们的情况下，$X^{-1}\sin X$ 的结点，作为 Ψ 的函数为 $\omega_{结点}=(2N\pi v/L)[1-((v/c)\cos\Psi)]^{-1}$，$N=1,2,\cdots$。但必须认识到 Doppler 效应与 $X^{-1}\sin X$ 效应之间有本质的差别。后者的影响是由于来自断层平面不同部分波之间的相消干涉而引起的，并且势必平滑掉高频成分。Doppler 效应并无这样的平滑效果，因为那里只有一个振荡器。Doppler 效应可利用

$$\Delta\dot{u}(\xi,t)=\exp(i\omega t)\delta(t-\xi_1/v)\delta(\xi_2)$$

代替方程(14.15)得到。

需要辅加两个震源参数以完成单向、矩形断层模式。它们是最后的滑动距 D 与表示滑动时间函数 $f(t)$ 特征的上升时间 T。Ben-Menahem 和 Toksöz (1963) 使用了一个指数函数

$$\begin{aligned} f(t)&=0 & t&<0,\\ &=D(1-e^{-t/T}) & t&>0, \end{aligned}$$

而 Haskell(1964)利用了一个斜坡函数

$$\begin{aligned} f(t)&=0 & t&<0,\\ &=Dt/T & 0&<t<T,\\ &=D & T&<t, \end{aligned} \tag{14.19}$$

如图 14.5 所示那样。取 $\dot{f}(t)$的 Fourier 变换并代入(14.18)，对于指数函数与斜坡函数分别得

$$\begin{aligned} |\Omega(\mathbf{x},\omega)|&=WLD\frac{\sin X}{X}\left|\frac{1}{1-i\omega T}\right|,\\ |\Omega(\mathbf{x},\omega)|&=WLD\frac{\sin X}{X}\left|\frac{1-e^{i\omega T}}{\omega T}\right|. \end{aligned} \tag{14.20}$$

不管哪种情况，有限上升时间 T 的影响导致波形更加平滑。对于高频，频谱以 ω^{-1} 衰减。在断层上破裂传播的有限长度，与在断裂上一点完成这个滑动所需要的有限时间一起，使得频谱在高频部分以 ω^{-2} 衰减。

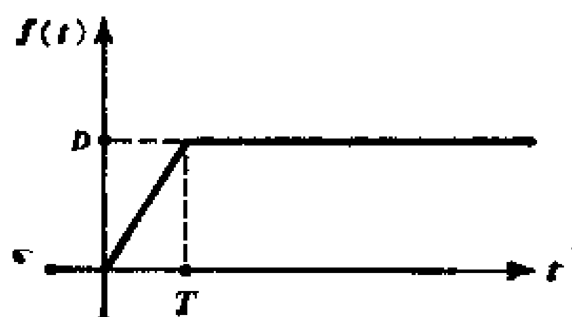


图 14.5

上升时间的定义

至此，已经引入了以下五个震源参数：

i) 断层长度 L。

ii) 断层宽度 W。

iii) 破裂速度 v。

iv) 永久滑动 D。

v) 上升时间 T。

相应的远场位移波谱由 (14.20) 给出。其波谱在 $\omega=0$ 附近是平坦的。且平坦部分的高度正比于 DWL 或地震矩。对于比破裂时间 $L[1/v-(\cos\Psi)/c]$ 与上升时间 T 的倒数更高的频率，频谱以 ω^{-2} 衰减。如若再考虑到有限宽度的影响，正如平泽等 (Hirasawa 和 Stauder, 1965) 所数的那样，可以预料波谱的衰减为 ω^{-3}。在实际中经常使用的另一个推广后的模型是假定破裂从断层平面上一点沿其长度方向向正、负方向传播。这就是所谓的双侧断层运动，相应的地震波谱很容易通过把两个沿相反方向传播的单向断层运动适当地迭加而得到。

地震能量、谱密度及以上五个参数模型的近场问题，Haskell (1964, 1966, 1969) 做了详细研究，通常称之为 Haskell 模型。这个模型在六十年代后期和七十年代曾广泛地用于解释观测到的体波、面波、自由振荡及近场地震记录。对许多地震已经做了 L，

W和D乘积的可靠估计。L的测定较W或D更容易些，因为它的影响能够用更长周期的波来研究，而长波受复杂路径的影响较少。D和L的估计需要近场资料，但这些资料往往难以获得。

一旦L，W与D被确定，就可参照相似几何学的裂纹问题粗略地估计出与断层运动相关连的应力降。迄今所获得的结果表明，对于绝大多数地震，应力降为10至100巴，且与震级大小无关。横跨断层上的滑动速度（D/T）看来也似乎是个常数：10至100厘米/秒。根据阿部Abe（1975）的概括，应力降$\Delta\sigma$与滑动速度（D/T）似乎和系数β（剪切波速度）与ρ（密度）的乘积成比例，此系数恰好是平面剪切波的阻抗。在本章的后面，我们将讨论这些结果的含义。

在日本及其邻近地区的一些主震震源参数之广泛研究是由金森（Kanamori,1973）和他的同事利用Haskell模型来做的。这个结果，正象金森（Kanamori，1973）所概括的，用地震方法获得的断层面积范围和滑动量，与用大地测量法对"脆弹性"回跳的地震模型（即静力法）所得结果十分一致，另一方面，对于归于"滞弹性"回跳的地震，用静力法求出的滑动和断层面积较用地震法求得的结果明显地偏大，它说明地震事件并不能完全表示与地震有关的构造活动过程。

14.1.6 破裂的成核、扩展和停止

当我们在靠近破裂过程的成核处观测时，Haskell矩形断层模型中的破裂单向传播，这种模型似乎过于简单了。为了使模型更逼真，有必要让破裂从一点开始（而不是同时沿一线段各处开始），然后以辐射状（而不是沿一个方向传播）以均匀速度向外扩展，直至覆盖断层平面上任意的二维表面。Savage（1966）首先利用方程（14.13）研究了来自这种震源模型的远场波形。

如图14.6所示，把断层放在$x_3=0$的平面内，并假定破裂从原点以匀速v向所有方向传播，然后在断层平面Σ的周围停止。

初始破裂前沿是一个由半径为 $\rho=vt$ 来描述的圆周，但最后的断层将成为一个由 $\rho=\rho_b(\phi')$确定的圆周，其中（ρ，ϕ'）是断层平面的柱坐标。

Savage（1966）假定位移间断是一个具有最后值为$\Delta U(\rho,\phi')$的时间的阶梯函数。在我们的表示方法中，模型能够表示为

$$\Delta u(\xi,t)=\Delta U(\rho,\phi')H(t-\rho/v)[(1-H(\rho-\rho_b)]. \quad (14.21)$$

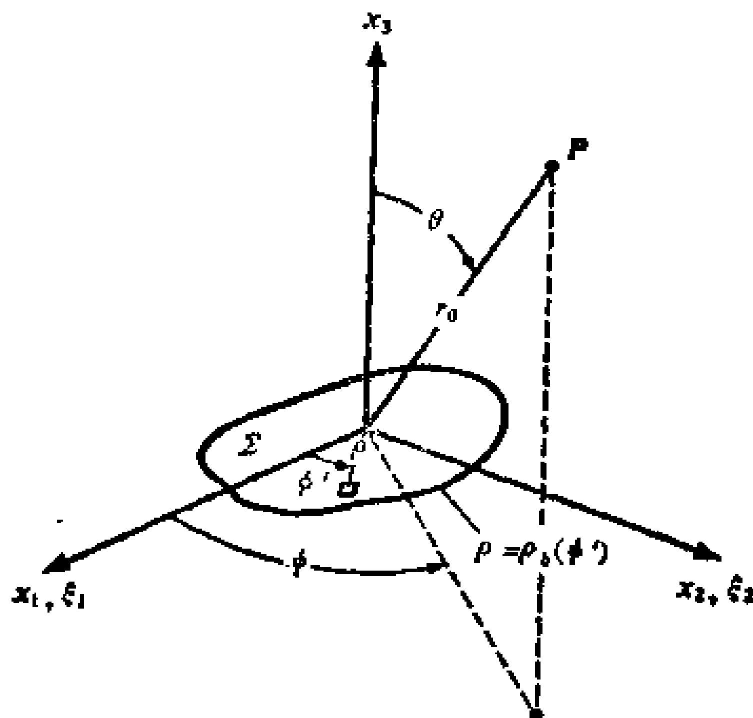


图 14.6

破裂从原点开始并在 x_1x_2 平面内以常速度 v 扩展。起初，破裂前沿是一个 $\rho=vt$ 的圆周，但最后的断层平面有一个由 $\rho=\rho_b(\phi')$ 给定的圆周。P 是观测点，断层的一个面元 $d\sum$ 位置由（ρ，ϕ'）表示

把它代入（14.13），求得

$$\Omega(x,\ t)=\iint_{\Sigma}\Delta\dot{u}\left(\xi,t-\frac{r_0-(\xi\cdot\gamma)}{c}\right)d\sum\nolimits_t$$

$$=\iint \delta\left(t-\frac{r_0}{c}+\frac{\rho\sin\theta\cos(\phi-\phi')}{c}-\frac{\rho}{v}\right)\Delta U(\rho,\phi')$$
$$\times[1-H(\rho-\rho_b)]\rho d\rho d\phi',$$

(14.22)

式中为了表示 $(\boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{\gamma})$，我们使用了如图 14.6 所示的球坐标。因为$\int f(x)\delta(ax-b)dx=f(b/a)/a$，相对于 ρ 的积分为

$$\int \delta\left(t-\frac{r_0}{c}-\frac{\rho q_c}{v}\right)\Delta U(\rho,\phi')[1-H(\rho-\rho_b)]\rho d\rho$$

$$=\left(t-\frac{r_0}{c}\right)\Delta U\left(\frac{t-\frac{r_0}{c}}{q_c/v},\ \phi'\right)\frac{v^2}{q_c^2}\quad 当\ 0<\frac{t-\frac{r_0}{c}}{q_c/v}>\rho_b$$

$$=0\qquad\qquad 当\frac{t-\frac{r_0}{c}}{q_c/v}>\rho_b,$$

式中 $q_c=1-(v/c)\sin\theta\cos(\phi-\phi')$假定在每一处都是正值；换句话说，假定破裂传播速度是亚音速的 $(v<c)$。若 $v>c$，我们将会在方向 (θ,ϕ)上看到 r_0/c 之前到达的波，此时 q_c 是负的，因为当 $t<r_0/c$ 时 $\Delta U[(t-r_0/c)/(q_c/v),\ \phi']$ 将不为零。

对于一个以亚音速传播的破裂，(14.22) 可写成

$$\Omega(\mathbf{x},t)=v^2\left(t-\frac{r_0}{c}\right)H\left(t-\frac{r_0}{c}\right)\int\frac{\Delta U\left(\frac{t-r_0/c}{q_c/v},\ \phi'\right)}{q_c^2}d\phi',$$

(14.23)

式中当$[(t-r_0/c)/(q_c/v)]<\rho_b$时，积分限取整个 ϕ' 的范围。

设最后的滑动 ΔU 除断层附近外都是均匀的，且假定我们考察的是远场位移波形的开始处，这里 $t-r_0/c$ 是小量，对于 ϕ' 在 0 至 2π 上求积分。在那种情况下，由 (14.23)，位移波形显然是时间的线性函数。其线性将保持到破裂前沿到达所规定的断层面的周围。

因此，具有均匀阶梯函数的滑动破裂以亚音速传播时，将产生一个远场位移波形 $(t-r_0/c)H(t-r_0/c)$，直至停止信号从断层周围到达为止。相应的质点速度波形是一个在 $t=r_0/c$ 上具有间断的阶梯函数。加速度是一个 δ 函数，在 $t=r_0/c$ 时达到无穷。所以，加速度、速度和位移的谱密度分别是常数及正比于 ω^{-1} 和 ω^{-2} 的函数。

为了了解当破裂停止传播时会发生些什么，让我们研究一下均匀滑动圆形断层的情况，其中 $\rho_s=\rho_0$(常数)，ΔU $(\rho,\phi')=$ $=\Delta U_0$（常数）及 Δu (ξ,t) 是一个 ρ 和 t 的函数，如图 14.7 所示。在垂直于断层平面的方向上得到了最简单的结果。当 $\theta=0$，$q_c=1$，方程（14.23）表明对于 ϕ' 的积分在 $v(t-r_0/c)<\rho_0$ 时是常数，而在 $v(t-r_0/c)>\rho_0$ 时变为零。换句话说，远场位移波形 $\Omega(\mathbf{x},t)$在 $\theta=0$ 时，$t=r_0/c+\rho_0/v$ 处有一跳跃间断，此处 $\Omega(\mathbf{x},t)$ 突然变成零。这个跳跃间断表明质点的速度和加速度此时是无限大。位移的谱密度将有一个按 ω^{-1} 衰减频率的渐近线。与破裂终止相关联的地震信号，Savage 命名为“停止震相”。

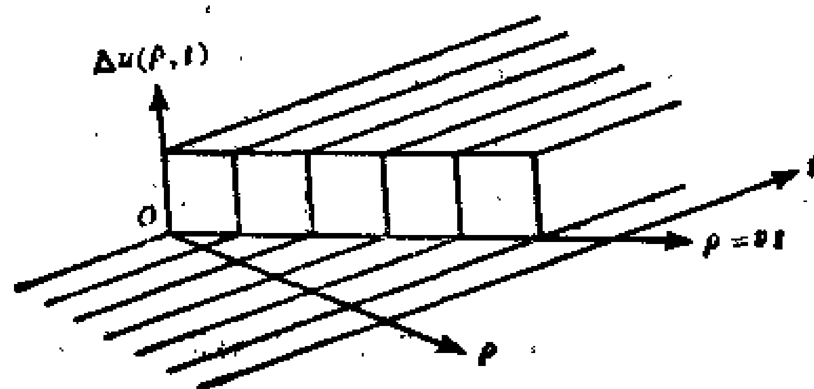


图 14.7
均匀滑动的圆形断层的滑动函数

若 $\theta\neq0$，$q_c=1-(v/c)\sin\theta\cos(\phi-\phi')$是 ϕ' 的函数，在台站方位 ϕ 与 ϕ' 相等时取极小值，而在相反的方向 $\phi+\pi$ 取极大

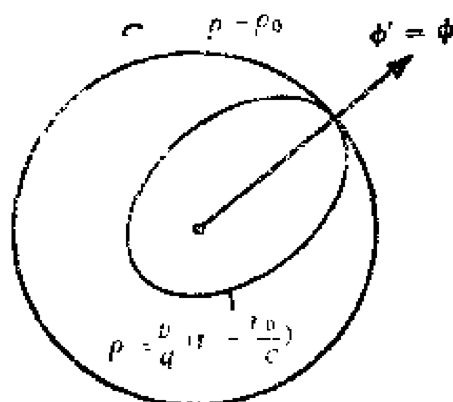


图 14.8

值. 既然$\Delta v(\rho,\phi')$是常数且q_c是个平滑函数,则在方程(14.23)中的积分对于$[v(t-r_0/c)]/q_c<\rho_0$时就与ϕ'的大小成正比. 只要$\rho=[v(t-r_0/c)]/q_c$的轨迹在圆$\rho=\rho_0$之内,ϕ'的积分范围就是2π。既然q_c在$\phi'=\phi$为极小,$\rho=[v(t-r_0/c)]/q_c$的轨迹将与圆$\rho=\rho_0$首先在$\phi'=\phi$处相交,如图 14.8 所示。对于$[v(t-r_0/c)]/q_c>\rho_0$,ϕ'部分的增量$\Delta\phi'$可以从图 14.9 所示的几何图形求出。

ρ_1表示在接触点上$\rho=[v(t-r_0/c)]/q_c$的曲率半径,考虑关系式

$$\Delta\rho_0=\rho_0-\sqrt{\rho_0^2-(\rho_0\Delta\phi')^2}\sim(\rho_0/2)(\Delta\phi')^2,$$

对$\Delta\rho_1$也有类似的结果,我们得到

$$\Delta\rho=\Delta\rho_1-\Delta\rho_0\sim\left(\frac{\rho_0^2}{2\rho_1}-\frac{\rho_0}{2}\right)(\Delta\phi')^2.$$

由于$\Delta\rho$是正比于两个曲线相交后的时间Δt,则积分范围$\Delta\phi'$将正比于$\sqrt{\Delta t}$,所以,远场位移$\Omega(\mathbf{x},t)$有一个正比于$\sqrt{\Delta t}$的突变。相应的谱密度将有一个以$\omega^{-3/2}$衰减的高频渐近线。在这一停止震相到达时,质点速度和加速度都将是无限的。因此,在这个模型中停止震相比成核相占优势。

从如上所述的求导过程可以看出,这个$\omega^{-3/2}$的频率关系不仅

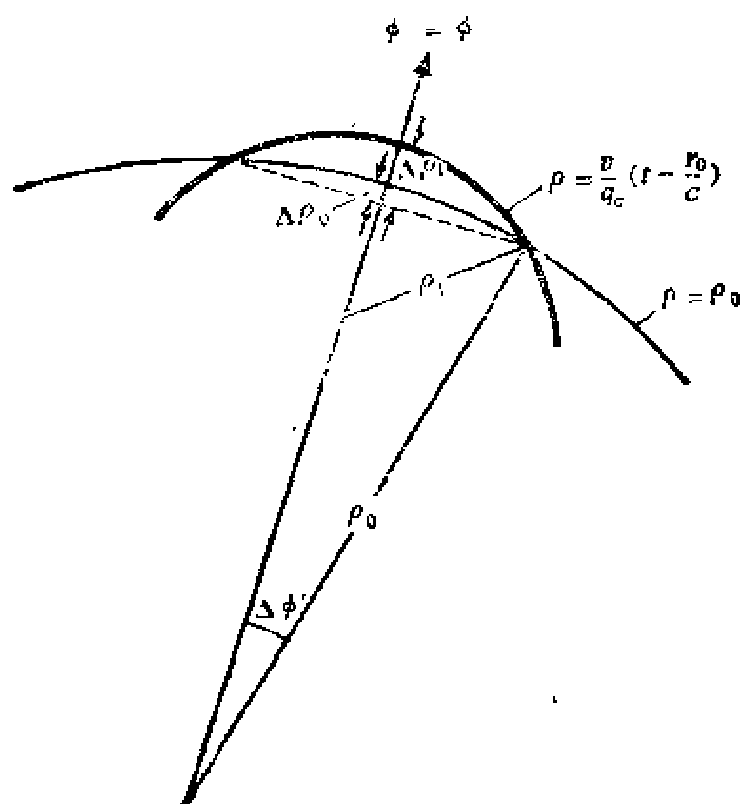


图 14.9

适用于圆型裂纹前沿的停止，而且也适用于任何平滑的曲线裂纹前沿。

把上述模型看作为剪切破裂有几个方而不实际。首先，它与已知的静力学解不一致；第二，在断层内部滑动的停止与破裂前沿的停止没有因果关系。这一点 Savage (1966) 曾对第一点做过一些考虑，但更充分地考虑是由佐藤和平泽 (Sato 和 Hirasawa, 1973) 做出的，他们假定了下列滑动函数：

$$\Delta u(\rho,t)=K[(vt)^2-\rho^2]^{1/2}H(t-\rho/v)[1-H(\rho-\rho_0)] \quad 当\ vt<\rho_0$$

$$=K(\rho_0^2-\rho^2)^{1/2}[1-H(\rho-\rho_0)] \quad 当\ vt>\rho_0, \tag{14.24}$$

式中

$$K=\left(\frac{24}{7\pi}\right)\left(\frac{\Delta\sigma}{\mu}\right).$$

这个模型是在如下的假定基础上构制的：在均匀剪切应力作用下（见图 14.10），圆形裂纹在其破裂形成的每一连续瞬时，Eshelby (1957) 的静力解都是成立的。把方程（14.24）代入(14.13)，然后进行积分佐藤和平泽得到了下列简洁的结果：

$$\Omega(\mathbf{x}, t)=2Kv\rho_0^3[\pi/(1-k^2)^2]x^2 \quad \text{当 } 0<x<1-k$$
$$=2Kv\rho_0^3(\pi/4)[1/k-(x^2/k)(1-k)^{-2}]$$
$$\text{当 } 1-k<x<1+k, \tag{14.25}$$

式中 $k=(v/c)\sin\theta$，而 $x=v(t-r_0/c)/\rho_0$。$\Omega(\mathbf{x}, t)$ 的一个例子如图 14.11 所示。现在远场位移的初始上升部分正比于$(t-r_0/c)^2$，而不是像前面均匀阶梯函数滑动情况下正比于$(t-r_0/c)$。相当于这个上升部分的谱密度将有一个 ω^{-3} 的高频渐近衰减。而整个波形的谱密度表明有 ω^{-2} 的高频渐近衰减。这表明停止震相在高频情况下支配着成核相。这种情况下 ω^{-2} 的衰减是可预料的，与均匀滑动情况下我们得到的 $\omega^{-3/2}$ 的衰减相比较，这是由于滑动函数依赖于距裂纹尖端的距离的平方根因而附加了一个 $\omega^{-\frac{1}{2}}$ 造成的。

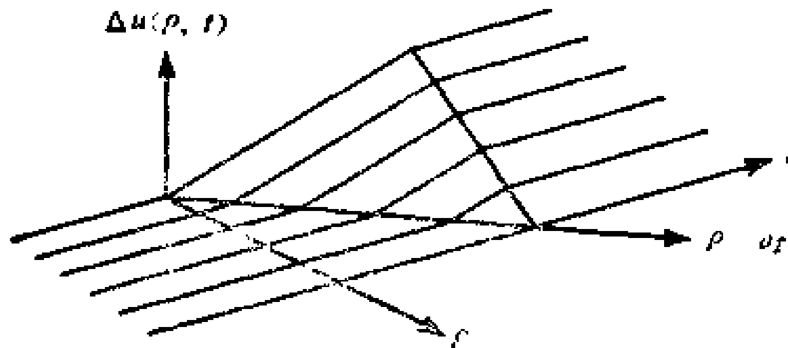


图 14.10

圆形断裂上剪切应力为常数的滑动函数

佐藤和平泽模型的一个缺点是在整个断层面上各处的质点运

动在同一瞬间停止。现在让我们来看一看另外一个由 Molnar 等 (1973) 提出的圆形破裂运动学模型。这个模型的滑动速度函数为

$$\Delta \dot{u}(\rho,t)=\Delta \dot{u}\left[H\left(t-\frac{\rho}{v}-\frac{\rho_c}{v}\right)-H\left(t-\frac{\rho}{v}-\frac{\rho_0}{v}\right)\right]H(\rho_0-\rho), \tag{14.26}$$

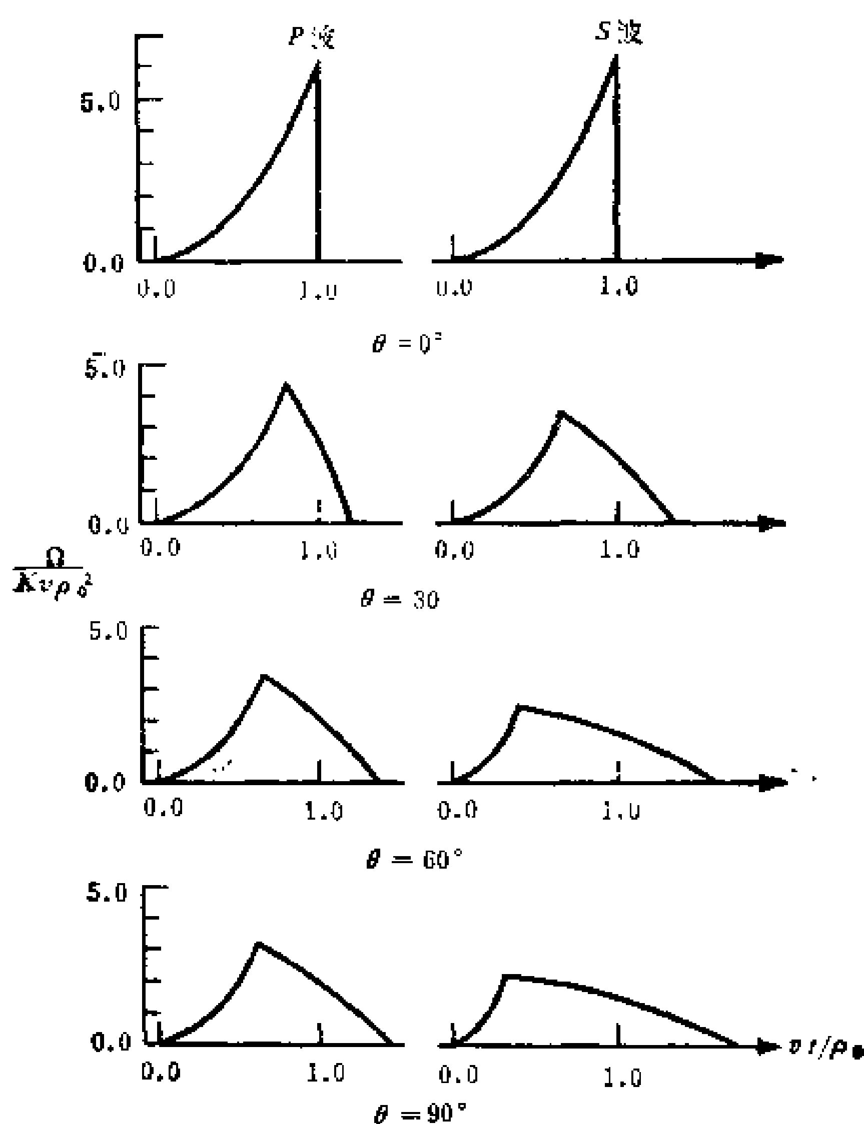


图 14.11
根据方程 (14.25) 的远场波形；θ 由图 14.6 定义 (引自 Sato and Hirasawa, 1973)

式中 ρ_0 是圆形破裂范围的半径，而 ΔV 是质点相对速度，假定它在这个圆形破裂范围内是常数。破裂在中心成核，并在所有方向上都以常速度 v 沿径向扩展到半径 ρ_0，然后又以同样速度收缩回中心。这是一个自发破裂过程的粗糙的运动学模型，在这个模型中，滑动随着自破裂前锋的到达开始，而继续到信息从断层边缘辐射回震源点。这个模型的滑动函数如图 14.12 所示。

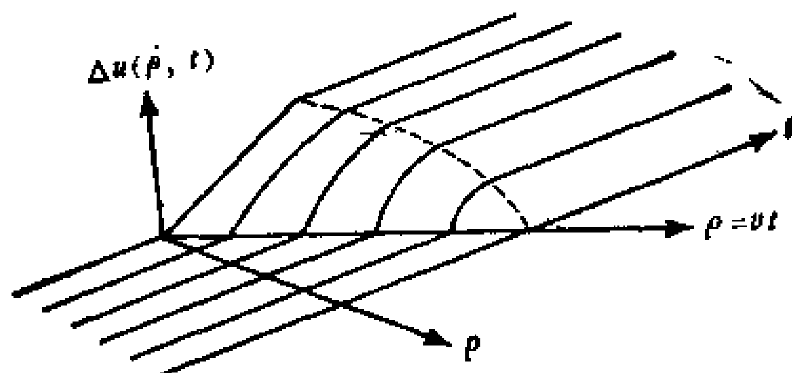


图 14.12

对一圆形断层上的滑动函数，此断层上一愈合阵面（从产生运动到停止）在断层已达到其最后大小之后向内传播

把 (14.26) 的Fourier 变换代入 (14.14)，并求积分值，Molnar 等获得了取决于 θ 的 ω^{-2} 至 ω^{-3} 的高频渐近衰减。这种情况下，对于一个停止震相可预期衰减为 $\omega^{-5/2}$，与均匀滑动情况下我们得到的 $\omega^{-3/2}$ 衰减相比，相当于在滑动函数与裂纹尖端距离的线性关系上增加了一个 ω^{-1}。

就初始部分而论，这个滑动函数只不过是均匀阶梯函数情况下滑动函数对时间的简单积分[方程 (14.21)]。所以，远场位移最初的上升部分是线性递增的时间积分。因此，它是抛物线型递增，与佐藤和平泽模型相同。

Dahlen (1974) 把破裂运动学的分析推广到一个椭圆裂纹，而这个椭圆裂纹以同样的形态持续增长。他使用了由 Burridge 和 Willis (1969) 得到的下列滑动函数作为一个扩展的椭圆裂纹的自型问题的精确解：

$$\Delta\mu(\xi,t)=\Delta V\left(t^2-\frac{\xi_1^2}{u^2}-\frac{\xi_2^2}{v^2}\right)^{1/2}H\left[t-\left(\frac{\xi_1^2}{u^2}+\frac{\xi_2^2}{v^2}\right)^{1/2}\right],\quad(14.27)$$

式中 ΔV 是通过裂纹中心的相对速度，而 u 和 v 分别是沿 ξ_1 和 ξ_2 方向上的破裂传播速度。若 $u=v$，对于佐藤和平泽所考虑的 $t<\rho_0/v$ 时圆形裂纹情况，上述方程可简化为（14.24）。滑动函数导致了在破裂表面上有均匀的应力降，且只要裂纹继续自型增加，这就是一个裂纹问题的解。远场位移起始上升部分呈抛物线型，且相应的高频渐近衰减正比于 ω^{-3}。与前面讨论的模型不同的是，Dahlen 模型认为，当裂纹边缘传入的区域，无论是增大摩擦应力还是减少构造应力的，破裂慢慢地停止下来，他断定成核相在高频处应控制着停止震相。

一旦我们忽略停止震相的贡献，远场谱的高频限就可以通过把（14.27）的 Fourier 变换代入方程（14.14）而得出。结果为：

$$|\Omega(\mathbf{x},\omega)|=\frac{4\pi uv\Delta V\omega^{-3}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\theta\cos^2\phi-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\sin^2\phi\right)^2},\quad(14.28)$$

式中 θ 和 ϕ 在图 15.7 中定义。由于（14.28）并不包括那些涉及裂纹最终大小的参数，所以上述模型预言了与地震大小无关的同样高频特性。此外，如果停止震相在高频占优势，地震大小将是一个因素，对于大地震，高频 $|\Omega|$ 值将比小地震的大。我们将在后面讨论地震波谱的相似律时再回过头来研究这一点。

14.1.7 拐角频率和高频渐近线

正如前几节所示，任何合理的地震运动学模型其远场位移在低频段应该有一个具有常数值的波谱，而在高频段则应正比于频率的负幂。根据 Brune（1970）的工作，我们把拐角频率定义为频谱中高频与低频渐近线交点处的频率。现在远场频谱大致可由三个参数来表征：(i) 正比于地震矩的低频值；(ii) 拐角频率；

(iii) 高频渐近线的斜。

让我们对前面讨论的某些运动学模型求得作为震源参数函数的拐角频率。不同模型之间的主要不同点是由于P波拐角频率与S波拐角频率的相对大小而造成的。

Savage (1972) 在假定破裂速度为v和最后断层长度为L的双侧断层情况下，计算了P波和S波的拐角频率：

$$
\begin{aligned}
\Delta u(\xi,t) &= D_0G(t-\xi_1/v) \quad 0<\xi_1<L/2 \\
&= D_0G(t+\xi_1/v) \quad -L/2<\xi_1<0 \\
&= 0 \quad \text{其它情况}, \qquad (14.29)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
G(t) &= 0 \qquad t<0, \\
&= 1-\exp(-t/T) \quad t>0.
\end{aligned}
$$

假定上升时间T等于破裂前锋通过半个断层宽度所行走的时间，即：$T=W/2v$，Savage 获得的拐角频率是与有限破裂传播和上升时间有关的两个拐角频率的几何平均。在这种情况下，高频渐近线正比于ω^{-2}。进一步假定$v=0.9\beta$，在所有方向上对P波平均的拐角频率为

$$2\pi\langle f_p\rangle=\sqrt{2.9}\cdot\alpha/\sqrt{LW}, \qquad (14.30)$$

而对S波为

$$2\pi\langle f_s\rangle=\sqrt{14.8}\cdot\beta/\sqrt{LW}. \qquad (14.31)$$

对于正常的 poisson 比，上述公式表明$\langle f_S\rangle$比$\langle f_P\rangle$高。

如前节所讨论的那样，佐藤和平泽的圆形裂纹模型也给出了一个像ω^{-2}那样的渐近线。但这时它预示出P波的拐角频率比S波更高。它们在各方向上对P波平均的拐角频率是

$$2\pi\langle f_P\rangle=C_P\alpha/R, \qquad (14.32)$$

而对S波是

$$2\pi\langle f_s\rangle=C_S\beta/R, \qquad (14.33)$$

其中R是裂纹的半径，而C_P与C_S是破裂速度的函数，如下表所示。

C_P 和 C_S 表

v/β	C_P	C_S
0.5	1.11	1.53
0.6	1.25	1.70
0.7	1.32	1.72
0.8	1.43	1.76
0.9	1.53	1.85

在这样情况下，$\langle f_P\rangle$较$\langle f_S\rangle$更高，而它们的比当 v/β 从0.5增加到 0.9 时，由 1.26 变化到 1.43

在前节讨论过的 Molnar 等的模型，也预示了$\langle f_P\rangle$高于$\langle f_S\rangle$，它通常可由观测证实。古屋（Furuya，1969）观测到S波的卓越周期在震级一定的情况下较P波的卓越周期大 1.3 至 1.5 倍，他还指出，简单的传播断层模型不能解释观测值。佐藤和平泽把传播断层模型的不充分性归因于在（14.15）和(14.29)中所给出的 $\Delta u(\xi, t)$ 的特定形式，其中假定断层上所有点的滑动时间函数关系都是共同的。对于一个长而薄的断层，其滑动函数仅由断层宽度决定，上述假定也许是近似有效的，但对于同等大小的断层来讲，其内破裂成核于一点而在断层面上向各个方向传播出去的模型，上述假定却是无效的。不论是他们的模型还是 Molner 等的模型，预示了$\langle f_P\rangle$高于$\langle f_S\rangle$，都不受上述限制的影响。正如我们在 15.1.5 节要讨论的那样，对有限圆形裂纹形成的动力学问题，其解的某些重要特性已包括在上述两个运动学模型之中。

此外，对于一个自型椭圆裂纹，公式（14.28）预示P波的拐角频率比S波拐角频率要低。这个公式建立在成核相在高频段控制着停止震相的假设基础上。如同下面所讨论的，这个假定似乎与尺度对地震波谱影响的观测结果相矛盾。

(14.28)给定的高频渐近线是由破裂速度和质点速度决定的，因为破裂速度由物质常数给定，而质点速度由破裂速度和初始应力决定，则其渐近线与最后的破裂区域大小无关。如果这个公式是正确的话，在一个给定的传播距离上，对于比拐角频率高的频率，远场地震波谱应同样有与地震震级无关的绝对振幅。

观测到的地震波谱是震源、路径和接收点的函数。最简单的估计路径和接收点影响的方法是利用同一台站上同一台地震仪所记录来自同一震中区的两个地震的地震图做比较而得到的。Berckhemer (1962) 从 1931—1951 期间斯图嘉特记录中收集了六个这样的地震对，发现在这些地震对之间频率与振幅比之间有强烈的相关性。安艺（Aki，1967）利用 ω 平方与 ω 立方两个运动学模型解释了这些资料。ω 立方模型是 Haskell (1966) 建议模型的一个特殊情况，并且它有 Dahlen (1974) 所讨论过的确切的特性。ω 立方模型的远场位移波谱表示为

$$\Omega(\omega)=\frac{\Omega(0)}{[1-(\omega/\omega_0)^2]^{3/2}}, \qquad (14.34)$$

式中 ω_0 是拐角频率，$\Omega(0)$ 正比于地震矩。如果我们假定大小地震之间有相似性，地震矩将正比于 L^3，拐角频率正比于 L^{-1}，因此有

$$\Omega(0)=\text{常数}\times\omega_0^{-3}. \qquad (14.35)$$

一旦上式中的常数被固定，所确定出的波谱曲线族将描述出地震波谱的相似律。相邻曲线由一个位于 0.05 赫处的常数因子所分开，结果是这些曲线用 Gutenberg 和 Richter 在 20 秒周期处面波振幅所定义的 M_S（见第 1 卷附录 2）来表示。如果确定了一条曲线的 M_S，那么其余曲线的 M_S 也就被确定了，然后可发现任意震级的两个地震间的振幅比是频率的函数。通过尝试法计算，安艺（Aki，1967）求出了在图 14.13 中所示的波谱曲线族，它们最适合 Berck hemer 的振幅比观测值。图 14.13 中的波谱曲线共用了在绝对意义上的相同高频渐近线，而与地震震级无关。

当成核作用是造成高频渐近线的主要原因时，像在 Dahlen 的模型那样，这是可以预料的。而且这种影响在地震图的开始部分，当停止的影响尚未出现时是可以被观测到的。事实上，由短周期（大约 1 秒左右）的 P 波振幅所定义的体波震级 m_b（第 1 卷，附录 2），当 $m_b=6$ 左右时，P 波振幅在头 5 秒达到最大值，且并不随地震震级而增加（Geller，1976）。这与图 14.13 的波谱曲

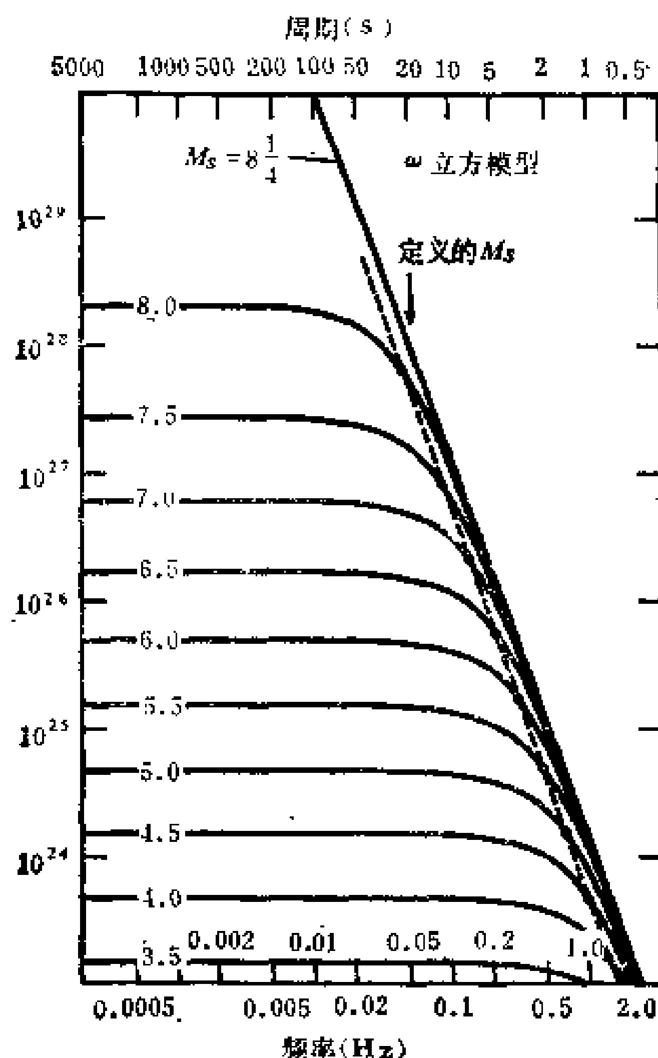


图 14.13

在一固定距离上，观测到不同 M_S 的地震远场体波位移谱。垂直坐标表示相应的地震矩，所有曲线都具有方程（14.34）的共同形态，并假定大小地震之间有相似性。虚线是 ω_0 的轨迹（引自 Aki，1967）

线是一致的，表明在1赫和更高频率处的谱密度对于所有 M_s 大于5.5级的地震都是相同的。

然而图14.13中的曲线，似乎并不适用于整个地震图，因为地震越大，地震信号的持续时间就越长。如果谱密度是与震级无关，则对于高于1赫的频率，较大的地震应该显示出较小的振幅。显然，这与震级为 $6<M<8$ 的地震的加速度峰值观测相矛盾，

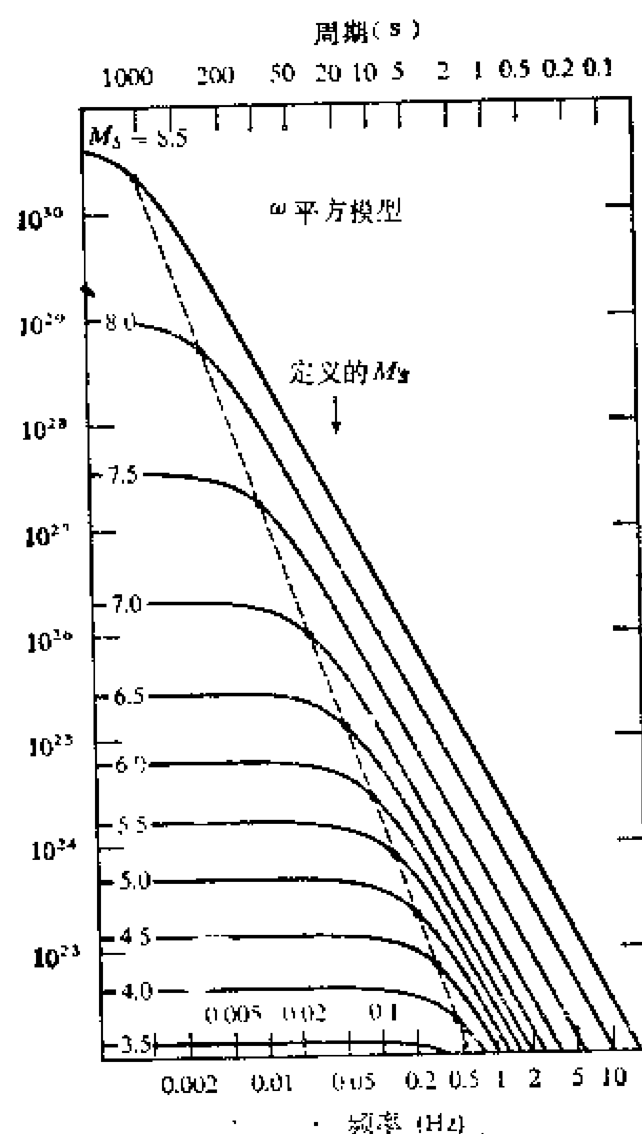


图 14.14

除了波谱共有方程（14.36）的共同型态外，与图14.13相同。虚线是 ω_0 的轨迹(引自 Aki, 1967)

如图 10.12 所示。在短距离上观测到的加速度峰值，其频率高于 1 赫，且在给定距离上，对于越大的地震，加速度也越大。

ω 平方模型给出了更为满意的结果。这个模型的远场波谱为

$$\Omega(\omega)=\frac{\Omega(0)}{[1+(\omega/\omega_0)]^2}. \tag{14.36}$$

适合于 Berckhemer数据的相应的波谱曲线族表示在图 14.14 中。在这种情况下，波谱振幅对于所有频率来讲，都是随震级 M_s 增加的，这与观测是一致的。

对于 ω 平方模型，高频谱随震级增大而无限增大是预料之中的，因为 ω^{-2} 渐近线表明在高频处停止震相占支配地位，而且停止点的数目（或停止环的长度）随破裂面积而增加。对 ω 立方模型有一个上限，因为成核点对任何地震都是一个单个的点。

补充　14.1

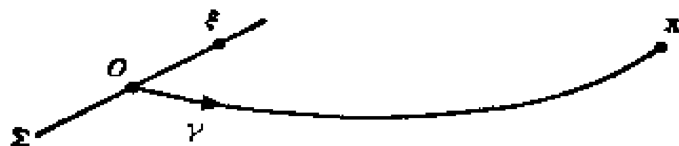
在和深度有关的构造内计算远场体波时有限断层作用的许可限度

在有关均匀介质内波传播的各章中，我们所利用的是非常简单的震源，通常是一个点源。为了使波传播理论在解释地震资料中是有用的，有必要把波传播理论与我们在这章及下一章所提出的震源理论相合併。为了计算来自断层作用的辐射，需要知道断层面Σ上的滑动函数[$\mathbf{u}(\xi,\tau)$]和 Green 函数 $G(x,t,\xi,t)$。

在远场内，以下近似式往往是适当的：

$$\mathbf{G}(\mathbf{x},t;\ \xi,\ \tau)\sim\mathbf{G}\left(\mathbf{x},t;\ 0,\tau-\frac{\xi\cdot\gamma}{c}\right), \tag{1}$$

它把在震源区域内具有速度 c (ξ) 的波和 $\mathbf{x}$ 处部分波场相联系起来了。其中 γ 是坐标原点（取在Σ上）处的单位矢量，且 γ 在沿波离开Σ的方向上。



上述近似式 (1) 等价于近似式 (14.11)，它被用于推导(14.13)。

当 Green 函数在Σ上积分时，我们只需要做一个在 ξ 和 0 之间远场相位改正（即走时差）。这对于随深度变化和随横向变化的介质内远场体波和面波是适合的。

例如在第九章内，我们得到了对于射线参数 P 的积分，以给出远场体波在随深度变化介质内的脉冲形状。所使用的是点源，并且这个源具有一定的走向、倾向和倾角（例如见（9.71），(9.77)）。为了推广这些结果以用于有限的断层，显然必须用

$$\iint_{\Sigma}\mu\Delta u(\xi,\omega)\exp\left[-\frac{i\omega(\xi\cdot\nu)}{c(\xi)}\right]d\Sigma \tag{2}$$

代替 $M_0(\omega)$（假定Σ上每一处向同一方向滑动）。

注意 γ 本身取决于射线参数，以致表达式（2)应该出现在对 P 的积分之内，它说明了在第九章中大部分的数值工作。然而，为了许多实际目的，对每一个 $\mathbf{x}$ 在 γ 的一个代表性值上对（2）求值是合理的。

14.2 近场地震运动学

前节我们已经研究了在远场观测到的地震波，其中波形和断层滑动函数之间存在着一个简单关系。但是从远场观测研究地震震源有两个主要的缺陷。首先，如(14.14)所示，远场波所载有关震源函数信息仅是对于$|\omega/k|>c$ 空间-时间谱的那部分，这里 ω 是频率，k 是断层平面内的波数，而 c 是波传播速度。要完全地确定滑动函数，需要在地震震源附近进行观测。其次，远场记录的波从震源开始传播了一个长距离。在这传播过程中，波经受了衰减、散射、扩散、聚焦、多次路径干涉及其他复杂的路径影响。把路径影响减到最低的方法之一是使观测位于靠近地震震源的短距离上，对震源机制更详尽的研究还是要依靠近场资料。

理论上我们希望直接在断层平面上的不同点 ξ 上测量滑动函数 $\Delta u(\xi,t)$。因为这样的测量实际上是不可能的，所以我们必须懂得靠近断层但又离开一定距离的地震运动是如何与断层上的滑动相关。这种关系并不十分简单，因为在短距离上记录到的地

震图是由来自断层上每一个单元的P波与S波的近场、运动项组成的，如4.2节中所讨论的那样，这些项在记录上并不是孤立的，所以必须计算整个地震图并与观测相比较。对于掌握了运动学特点的地震断层，预测其附近的工程，结构场地的地震效应时，这种计算也是有用的。

14.2.1 均匀、无界、各向同性介质内有限位错源的近场合成地震图

对于一个埋藏在均匀、各向同性、无界介质内的有限位错源的近场地震运动，能够通过对4.2节中所获得解的积分来计算，这个解是对于无限小断层$d\Sigma$，滑动为$[\boldsymbol{u}(t)]$的地震位移。关于一个在有限断层表面$\Sigma(\boldsymbol{\xi})$上任意滑动函数的解可利用方程(4.30)或方程(14.1)与(14.2)来获得：

$$
\begin{aligned}
u_i(\mathbf{x},t) =& \iint_{\Sigma} \mu \Bigg[\left(\frac{30\gamma_i n_p\gamma_p\gamma_q\nu_q - 6\nu_i n_p\gamma_p - 6n_i\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho r^1}\right) \\
&\times\left(F\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-F\left(t-\frac{r}{\beta}\right)+\frac{r}{\alpha}\dot{F}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-\frac{r}{\beta}\dot{F}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right) \\
&+\left(\frac{12\gamma_i n_p\gamma_p\gamma_q\nu_q - 2\nu_i n_p\gamma_p - 2n_i\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho\alpha^2 r^2}\right)\Delta u\left(\xi, t-\frac{r}{\alpha}\right) \\
&-\left(\frac{12\gamma_i n_p\gamma_p\gamma_q\nu_q - 3\nu_i n_p\gamma_p - 3n_i\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho\beta^2 r^2}\right)\Delta u\left(\xi, t-\frac{r}{\beta}\right) \\
&+\frac{2\gamma_i n_p\gamma_p\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho\alpha^3 r}\Delta\dot{u}\left(\xi, t-\frac{r}{\alpha}\right) \\
&-\left(\frac{2\gamma_i n_p\gamma_p\gamma_q\nu_q - \nu_i n_p\gamma_p - n_i\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho\beta^3 r}\right)\Delta\dot{u}\left(\xi, t-\frac{r}{\beta}\right)\Bigg] d\Sigma(\xi),
\end{aligned}
\tag{14.37}
$$

其中$F(t)=\int_0^t dt'\int_0^{t'}\Delta u(\boldsymbol{\xi},t'')dt''$，$\boldsymbol{n}\Delta u(\boldsymbol{\xi},t)=[\boldsymbol{u}]$，$\boldsymbol{\nu}$是断层的法线，$r=|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|$，而$\boldsymbol{\gamma}=(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})/r$。面积分下的每一项都有一个简单的形式以识别像$P$波或者$S$波那样传播的波，其衰减为震源距某个负次方幂。对于一个给定的滑动函数$\Delta u(\boldsymbol{\xi},t)$每一项波形能够容易地计算出来。然而，对于整个位移要做出一个一般的叙述是困难的，因为在短距离上，这些项几乎是同时到

达，经常相互抵消，而且所有项的总和特性要想从每一单项的独立考虑预测出来是完全不可能的。对于紧靠近断层的运动更是如此。因为当 $r\to 0$ 时，每一项都趋于无限，然而从物理上讲，所有项的总和却是有限的。

在七十年代中期以前，这方面所做的工作绝大多数是建立在直接对（14.37）的 ξ 进行数字积分上的。为了对（14.37）进行数值积分，我们用在网格点上的求和代替积分，假定在网格间距内被积函数是平滑变化的。（14.37）中被积函数的每一项都包含有截然不同的两个因子：一个是 $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$ 的负幂，另外一个是可从 $\Delta u(\xi, t-r/c)$ 直接导出的函数，其中 c 是波速。

因为 r^{-n} 在 (r_0, r_0+l) 上是平滑的，nl/r_0 与 1 相比是微不足道的。所以，网格间隔 l 必定取作比 r_{min}/n 小很多，其中 r_{min} 是从观测点 $\boldsymbol{x}$ 至断层面 $\Sigma(\xi)$ 的最小距离。

其它因子的平滑度是由滑动时间函数来测定的。因为 $\Delta u(\boldsymbol{\xi}, t-r/c)$ 包含有代替滑动函数的时间变量，如果滑动函数在时间间隔 l/c 上迅速变化，那么在距离 l 上，它将是 $\boldsymbol{\xi}$ 的迅速地变化函数。为了使这个因子在网格间隔 l 上是平滑的，l/c 必须比包含在滑动函数内的最小周期 T_{min} 小得多。例如，若滑动函数以上升时间 T 来表征，那么 l 必定比 cT 小得多。l 的选择范围因上述两个条件而被限制在图 14.15 的影区内，其中 λ_{min} 是相应于 T_{min} 的波长，而 ε 与 ε' 是小的分数。

对于一个相对较大的 r_{min}，我们可以利用类似于 14.13 节中关于远场计算所采用的近似方法，以便在某种程度上放宽对 l 的限制。如果 l^2 比 $r_{min}\cdot\lambda_{min}$ 小得多，那么从（14.11），在每一个网格距上可以令

$$r=r_0-(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\xi}),$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是从网格点指向观测点的单位矢量。然后，假定因子 r^{-n} 是常数，就能得到每一网格间距上积分的简单结果，例如，如果使 $\Delta u(\xi, t)$ 的时间函数关系为 $\exp(-i\omega t)$，网格间距上的积分

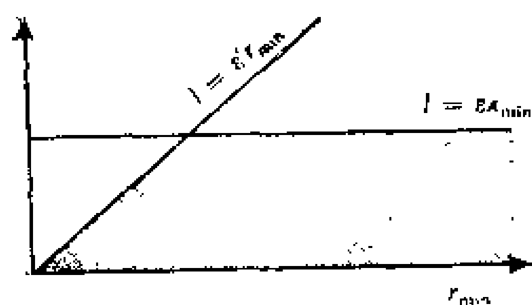


图 14.15

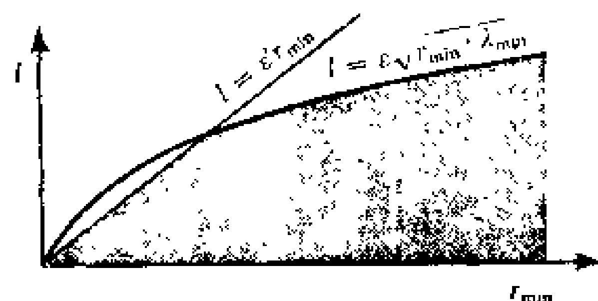


图 14.16

将有一个因子 $(x^{-1}\sin x)e^{ix}$，其中 $x=\omega l/2(1/v-c^{-1}\cos\Psi)$，如14.1.5节所定义的那样。然后，我们就能对所有网格点上的这些被积函数分项求和。对一个给定的滑动函数，其时间域解能够由不同 ω 的解加以合成。这个方法适当选择的 l 将落在图14.16中的影区.

两种方法都已用来解释位于震中附近的强震仪的（或低放大倍数）地震记录，而且已获得了几个从观测比较中得到的有趣结果。例如，对 Haskell 型的运动位错（14.19），其滑动平行于破裂传播方向，可以预料到，在断层附近垂直于断层平面方向上的位移，应该具有振幅相当于滑动的有效部分而宽度几乎等于上升时间的脉冲形式。这样一个具有预期运动方式的脉冲位移已被仅距圣安德烈斯断层 80 米处的强震仪在 1966 年 6 月 28 日帕克菲尔德地震时实际观测到。图 14.17 给出了加速度、速度和位移的垂直分量。一份略有不同的位移记录由 Housner 和 Trifunac 发表过（1967)。他们使用了一个与获得图 14.17 所使用的方法不相同的积分技术。图 14.18 表明一个单侧传播断层位移的合成理论地震图。适合于这个观测的模型，其上升时间和滑距分别是 0.4—0.9 秒与 60—100 厘米。虽然这些震源参数的估计值后来由 Bonchon(1979) 做了修正，他考虑了低速层的影响，但理论与实验结果的成功鼓舞了地震学家去进一步从事地震断层附近强运动的人工合成工作。用数字合成法则测定的震源参数结果由

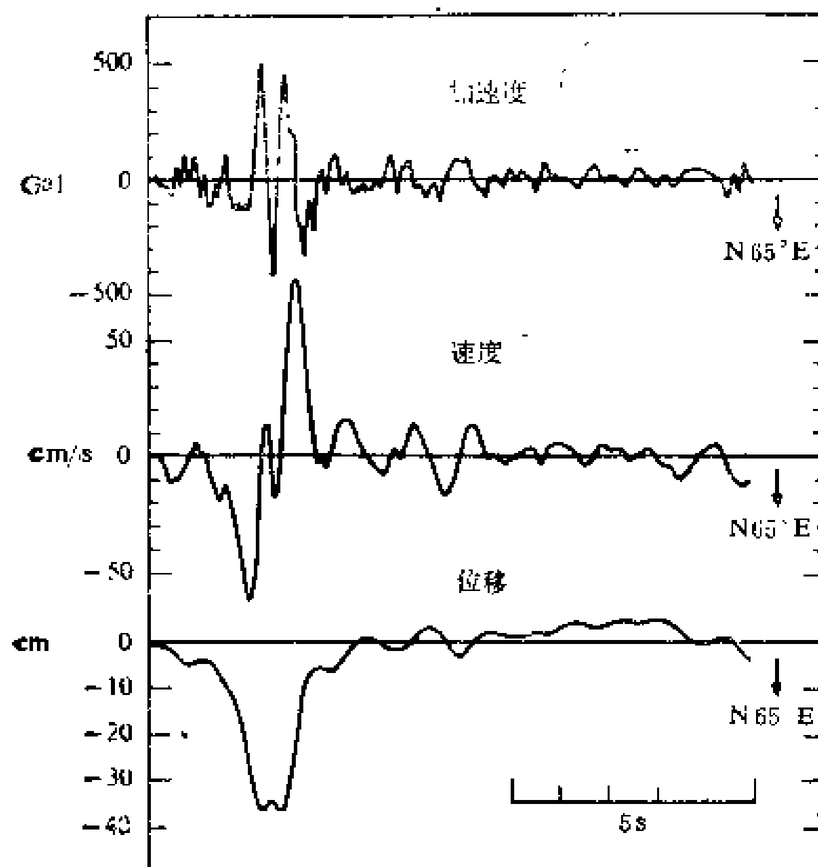


图 14.17

在垂直于圣安德烈斯断层迹线 80 米处观测到的 1966 年帕克菲尔德地震的加速度、速度与位移记录（引自 Aki，1968）

Geller(1966) 做了概括。

利用数字积分方法，Anderson 与 Richards(1975) 对 Haskell 模型和几种不同的断层运动学模型近场运动进行了广泛的研究；他们发现，从运动学模型来测定滑动函数，实际上往往是困难的，甚至在离开震源区有一个断层长度的距离内有几份地面运动的记录可利用时也是如此。

上述数字积分方法有几个限制。这种方法费时而且不能给出好的物理上的理解。因而不能从中概括出地震运动的性质，但对每一种具体情况还必须计算它。这种限制对高频特别严格。

为了克服这种限制。已经找出了简化震源模型的简洁、精确

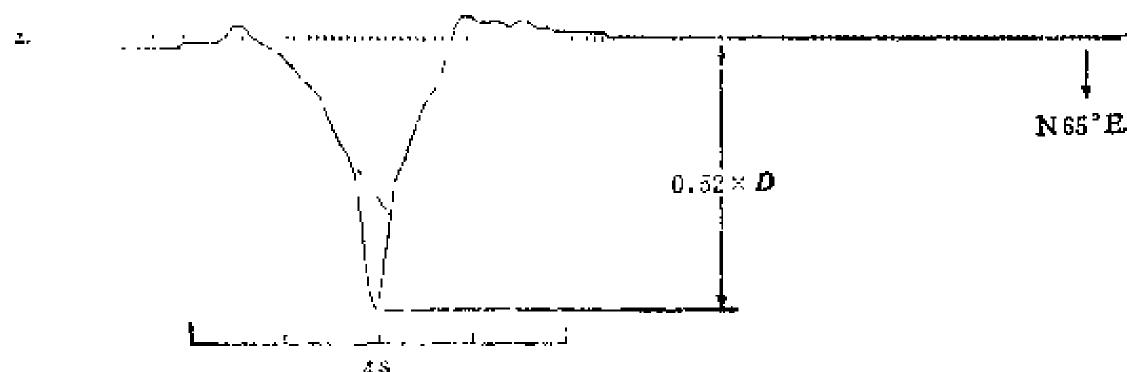


图 14.18
相当于图 14.17 中所示一个右旋走向滑动断层观测的合成位移，断层以 2.2 公里/秒破裂速度传播（引自 Aki,1968）

的解析解。例如，Boatwright 和 Boore（1975）及佐藤（Sato, 1975）证明了对于 Haskell 模型，当其断层宽度 W 变成零的情况下可以求得解析解。另一种极端情况是当 W 变成无限大时的模型。在这种情况下，问题被简化为二维问题。这一简化对于频率高于由台站至断层的最小距离 r_{min} 与断层平面宽度 W 所确定的临界频率 f_c 时，可以证明是正确的。如果台站紧靠着断层面，对于高于 f_c 的频率，地震运动将与 W 无关。于是我们能够选择 W 为无限大，从而将问题减化为二维的。对二维问题，找出其严密、精确的解要更容易些，如 14.2.3 节与 14.2.4 节所证明的那样，其结果对于理解高频运动，特别是靠近断层的地面加速度的性质将是有用的，而这是用上述数值方法研究所不能奏效的。

对于一个一般的层状介质，在一定情况下点源解的迭加也许是有用的。点源解能够用 Gagniard 方法（9.1 节）来计算，如 Heaton 和 Helmberger(1977) 对 1968 年博雷戈（Borego）山地震所做的那样，或者像 Swanger 与 Boore(1978) 对同一个地震用面波法（7.5 节）进行的计算。为了更加精确地计算有限移动断层的近场问题，把弹性波场表示为平面波的迭加是十分有利的。这与反射法（9.2 节）相类似。但由于靠近地震源需要包括非均匀平面波，其边界条件和分界面条件对每一个平面波可以分

别得到满足，因而这些平面波将依据震源场而迭加起来．这个方法也消除了其它方法需要把断层平面离散化这一步骤。因为在迭加前，在整个断层面上对每一个震源平面波的积分从解析上是可以实现的。Niazy(1973，1975) 以及 Bouchon 和 Aki(1977b)专门将此方法应用到关于 1971 年圣费尔南多地震的二维问题之中。Boucher(1979)又把此问题成功地推广到三维情况，他应用此方法计算了1966年帕克菲尔德地震。

14.2.2 传播断层附近的高频运动

为了透彻地了解传播断层近场的一些物理性质，我们将研究一些被大大简化的模型。令断层平面位于 xy 平面内，其破裂锋平行于 z 轴并且沿 x 方向传播，如图 14.19 所示。在 xy 平面上观测点 P 附近，断层宽度对高频运动的影响可以忽略。为了证明这一

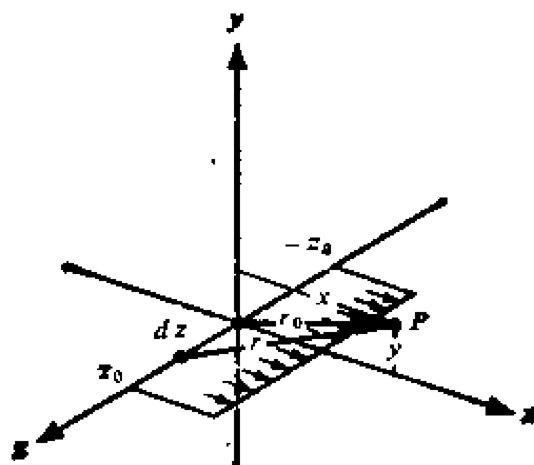


图 14.19

点，取沿 z 轴分布的标量球面波源的简单情况。将一个无限小线段上的贡献写为 $\exp[i\omega(t-r/c)]/r dz$，并假定震源函数在整个断层的宽度内是同时产生的，那么整个线段 $(-z_0, z_0)$ 上的总贡献为

$$\phi(P)=\int_{-z_0}^{z_0}\frac{\exp[-i\omega(t-r/c)]}{r}dz.$$

把变量 z 变为 $\zeta=\tan(\pi z/2z_0)$（为了使积分限变换到无限），上述积分可改写为

$$\phi(P)=\frac{2z_0}{\pi}\exp(-i\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\omega r/c)}{r}\frac{d\zeta}{1+\zeta^2}. \qquad (14.38)$$

这个积分可以用最速下降法求值（补充 6.3）。首先我们得到鞍点，在这个点上指数因子 $f(\zeta)=ir/c$ 是稳定的，因此

$$\frac{df}{d\zeta}=\frac{i}{c}\frac{dr}{d\zeta}=\frac{i}{c}\frac{z}{r}\frac{1}{1+\zeta^2}\frac{2z_0}{\pi}=0,$$

从而鞍点为

$$z=0 \text{ 或 } \zeta=0.$$

对于 $z=0$，令 $r=r_0$，$f(\zeta)$ 按 Taylor 级数展开为

$$f(\zeta)=\frac{ir_0}{c}+\frac{i}{2cr_0}\zeta^2\left(\frac{2z_0}{\pi}\right)^2+\cdots.$$

沿 ζ 平面内最速下降路径由

$$\omega f(\zeta)=i\omega r_0/c-s^2/2$$

给出，式中 s 沿实轴从 $-\infty$ 到 ∞ 变化。对于小 ζ，最速下降路径为

$$\frac{-i\omega}{2cr_0}\zeta^2\left(\frac{2z_0}{\pi}\right)^2=\frac{s^2}{2}$$

或

$$\zeta=\frac{\pi}{2z_0}\sqrt{\frac{cr_0}{\omega}}e^{i\pi/4}s. \qquad (14.39)$$

这是一个穿过 ζ 平面原点并与实轴成 45°角的直线路径。若 $(\pi/2z_0)\sqrt{cr_0/\omega}$ 非常小，对被积函数的贡献绝大多数来自原点附近的路径段。在那种情况下，对于大的 $|\zeta|$，无论最速路径怎样偏离直线路径都没有关系。因此，如果

$$\frac{\pi}{2z_0}\sqrt{\frac{cr_0}{\omega}}\ll 1, \qquad (14.40)$$

利用(14.39)能够把(14.38)改写为

$$
\phi(P) \sim \frac{2z_0}{\pi} \exp(-i\omega t) \frac{\pi}{2z_0} \left(\frac{cr_0}{\omega}\right)^{1/2} \frac{\exp\left(\frac{i\omega r_0}{c} + \frac{i\pi}{4}\right)}{r_0} \int_{-\infty}^{\infty}
$$

$$
\times e^{-s^2/2} ds = \sqrt{2\pi} \left(\frac{c}{\omega r_0}\right)^{1/2} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r_0}{c}\right) + \frac{i\pi}{4}\right]. \tag{14.41}
$$

这个表达式并不包含 z_0，显示出与高频波无关，它满足线源的长度条件（14.40）。这是一个与 z 轴距离成平方根倒数形式衰减的圆柱波。高频按因子 $\omega^{-\frac{1}{2}}$ 衰减且相对来自原点的球面波有 $\pi/4$ 的相位滞后。如果波长 λ 与距离 r_0 的乘积要比 z_0^2 乘上某个因子小的话，则条件（14.40）得到满足。大量经验表明关于传播的位错源，这个因子大约是 1/5。

对于断层附近的高频运动，我们可以利用这个解来表示当断层宽度等于无穷时的二维问题。因为每个量与 z 无关，这就大大地简化了分析过程。我们考虑两个基本的断层传播类型：法平面和切平面类型。对于法平面类型，滑动沿 z 方向，如图 14.20 所示。合成位移仅有 z 方向一个分量。在晶体位错理论中，称这种类型为螺旋位错，其中滑动方向（Burgers 矢量）是平行位错线的。对于切平面类型，滑动是在 x 方向上的，合成位移有 x 分量与 y 分量。在晶体位错理论中，这种类型被称为刀刃型位错，其

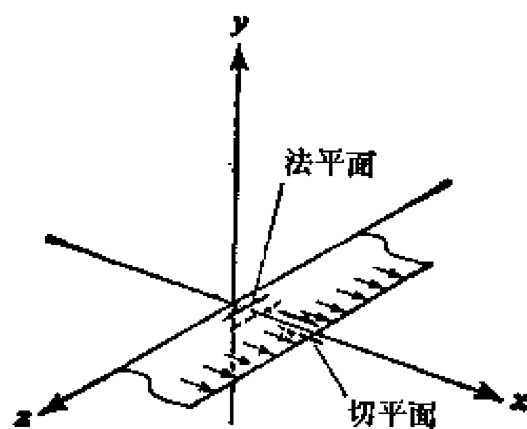


图 14.20

中滑动方向垂直于位错线，当刀刃型位错线沿平行于滑动方向运动时，这种运动称之为滑移。

14.2.3 法平面问题

作为最简单的法平面问题，考虑在坐标

$$x'=x-vt,$$
$$y'=y,$$
$$t'=t$$

中具有以常速度 v 的运动，我们将认为在此情况中所出现的现象是稳定的。一个半无限断层平面从时间 $-\infty$ 开始以速度 v 传播，这一情况是可能的。横跨断层平面上位移 $w(x, y, t)$ 的间断条件为

$$w(x, +0, t)-w(x, -0, t)=\Delta wH(-x'), \tag{14.42}$$

其中 $H(x)$ 是单位阶跃函数。假定应力是连续的，则

$$\mu\frac{\partial w}{\partial y}(x, +0, t)=\mu\frac{\partial w}{\partial y}(x, -0, t). \tag{14.43}$$

对于一个各向同性的均匀体，其运动方程可简化为 w 的波动方程：

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{14.44}$$

利用新的坐标，并应用稳定性条件 $\partial/\partial t'=0$，即

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'}=-v\frac{\partial}{\partial x'},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'},$$

方程(14.44) 能改写为

$$\left(1-\frac{v^2}{\beta^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y'^2}=0. \tag{14.45}$$

当 $v=0$，这个方程化为 Laplace 方程，对于边界条件(14.42)

与 (14.43)，它的解是熟知的。其解为

$$w(x', \ y') = \frac{\Delta w}{2\pi} \arctan \frac{y'}{x'},$$

它能够通过把 $\log(x'+iy')$ 的虚部看作为谐波并使之满足 Laplace 方程而得出。这里，arc tan 的取值范围为 $(-\pi, \ \pi)$。若 $w(x', y')$ 是 Laplace 方程的解，那么(14.45)的解将是 $w(x'/\sqrt{1-v^2/\beta^2}, \ y')$. 这里已假定破裂传播速度为亚音速，$v<\beta$。所以(14.44) 的解为

$$w(x, y, t) = \frac{\Delta w}{2\pi} \arctan \frac{y\sqrt{1-v^2/\beta^2}}{x-vt}. \qquad (14.46)$$

它满足边界条件(14.42)，并要求除 $y=0$，$x<vt$ 外，w 处处连续，因为(14.46) 正确地给出

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= 0 \qquad \text{当 } y=0, x>vt \\ &= \frac{\Delta w}{2} \quad \text{当 } y=+0, x<vt \\ &= -\frac{\Delta w}{2} \quad \text{当 } y=-0, x<vt. \end{aligned}$$

因此，应力分量是

$$\tau_{xz} = -\frac{\mu\Delta w}{2\pi} \frac{\sqrt{1-v^2/\beta^2} \cdot y}{(x-vt)^2+(1-v^2/\beta^2)y^2},$$

$$(14.47)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\mu\Delta w}{2\pi} \frac{\sqrt{1-v^2/\beta^2}(x-vt)}{(x-vt)^2+(1-v^2/\beta^2)y^2},$$

τ_{xz} 在 $y=0$ 时为零，且在 $y=0$ 处满足条件(14.43)，此处

$$\tau_{yz} = \mu\frac{\partial w}{\partial y} = \mu \frac{\Delta w}{2\pi} \frac{\sqrt{1-v^2/\beta^2}}{x-vt}. \qquad (14.48)$$

在平面 $y=0$ 上应力 τ_{yz} 是 $x-vt$ 的奇函数，它在尖端前后分别变成 $+\infty$ 与 $-\infty$。记住当破裂速度为 β 时，τ_{yz} 变成零也是重要

的。方程(14.46)由 Frank(1949)，Liebfried 和 Dietze(1949)及 Eshelby(1949)得到。

由(14.46) 计算出的质点速度为：

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\Delta w}{2\pi}\frac{yv\sqrt{1-v^2/\beta^2}}{(x-vt)^2+y^2(1-v^2/\beta^2)}. \qquad (14.49)$$

速度峰值在 $x=vt$，且等于 $(\Delta w/2\pi)\left[v/(y\sqrt{1-v^2/\beta^2})\right]$，对于这种半无限裂纹来讲，当破裂速度接近 β 时，峰值趋于无穷。它的衰减为距断层距离之倒数。

由 (14.49)，可算出加速度为：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\Delta w}{2\pi}\frac{2y(x-vt)v^2\sqrt{1-v^2/\beta^2}}{[(x-vt)^2+y^2(1-v^2/\beta^2)]^2}.$$

加速度峰值在 $x-vt=(y/\sqrt{3})\sqrt{1-v^2/\beta^2}$ 处，其值为

$$\frac{\Delta w}{2\pi}\frac{9}{8\sqrt{3}}\frac{v^2}{y^2(1-v^2/\beta^2)}.$$

当破裂速度接近 β 时，这个加速度峰值也趋向于无穷。它以距断层距离平方的倒数衰减。

一个传播位错近场运动的性质可以由它们的波谱更好地揭示出来。在 $x'=0$ 处，$\partial w/\partial t$ 的 Fourier 变换能够通过在极点 $t=\pm iy\sqrt{(1-v^2/\beta^2)}/v$ 上的留数值得到，它等于

$$\frac{\Delta w}{2}\exp\left(-|y|\cdot|\omega|\cdot\frac{\sqrt{1-v^2/\beta^2}}{v}\right).$$

这表明它随 y 和 ω 指数衰减，表明它们是由在断层平面附近捕获的非均匀平面波所组成的。对于具有均匀速度的亚音速破裂传播来讲，从 $-\infty$ 时间开始一直持续到 $+\infty$ 时间，近场运动很快地随距断层平面之距离 y 而衰减；速度峰值以 y^{-1} 衰减，而加速度峰值以 y^{-2} 衰减。正如对非均匀平面波所预料的那样，其波谱随频率增加呈指数衰减。

其次，让我们引入断层传播的开始与停止的概念，并看一看在近场将发生些什么。为了研究开始的影响，我们将应用下述边界条件代替（14.42）即，

$$w(x,+0,t)-w(x,-0,t)=\Delta w H\left(t-\frac{x}{v}\right)H(x), \quad (14.50)$$

这相当于一个从 $t=0$，$x=0$ 开始滑动的阶跃函数，并且沿 $+x$ 方向以速度 v 传播，如图 14.20 所示。由于其运动在活动坐标系中是非稳定的，所以不能再应用方程（14.45）。$w(x, y, t)$ 的 Laplace 变换为

$$w(x,y,s)=\int_0^{\infty} w(x,y,t)e^{-st}dt,$$

把运动方程(14.44) 重新写为

$$\frac{s^2}{\beta^2}w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (14.51)$$

取边界条件(14.50)的 Laplace 变换，有

$$w(x,+0,s)-w(x,-0,s)=\frac{\Delta w\cdot e^{-sx/v}}{s}H(x). \quad (14.52)$$

因为

$$e^{-sx/v}H(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{i(k-is/v)}dk,$$

它很容易由 $k=is/v$ 处的极点留数值求得，所以边界条件(14.52)可重写为

$$\begin{aligned} w(x,+0,s)&=-w(x,-0,s)\\ &=\frac{\Delta w}{4\pi s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{i(k-is/v)}dk, \end{aligned} \quad (14.53)$$

这里我们利用了 w 的对称性(y 的奇函数)

为了满足上述边界条件，假定(14.51) 的解有下述形式：

$$w(x,y,s)=\int_{-\infty}^{\infty}Q(k)e^{ikx-\nu y}dk,$$

式中 $\nu^2=k^2+s^2/\beta^2$。$Q(k)$是通过令 $y=\pm 0$ 并与(14.53)进行比较而确定的。结果是

$$w(x,y,s)=\frac{\Delta w}{4\pi s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx-\nu y}}{i(k-is/v)}dk \qquad y>0,$$

$$=-\frac{\Delta w}{4\pi s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx+\nu y}}{i(k-is/v)}dk \quad y<0. \tag{14.54}$$

在$y=0$处应为$\mu(\partial w/\partial y)$是连续的。

方程(14.54) 有一个大家熟悉的可应用 Cagniard 方法的形式(Mitra, 1966; Boore and Zoback, 1974)。用关系式

$$-s\tau=ikx-\sqrt{k^2+s^2/\beta^2}\,y,$$

把变量k变换成τ。(14.54)简化为

$$w(x,y,s)=-\frac{\Delta w}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\frac{(\tau^2-r^2/\beta^2)^{1/2}\cos\theta-i\tau\sin\theta}{(\tau^2-r^2/\beta^2)^{1/2}\sin\theta-i(\tau\cos\theta-r/v)}$$

$$\times\frac{H(\tau-r/\beta)}{(\tau^2-r^2/\beta^2)^{1/2}}\frac{e^{-s\tau}}{s}d\tau,$$

式中$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$。因为上述方程是$sw(x, y, s)$的 Laplace 变换形式，相应在时间域内的解$\partial w(x, y, t)/\partial t$是

$$\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}=\frac{\Delta w}{2\pi}\frac{(t^2-r^2/\beta^2)\sin\theta\cos\theta-t\sin\theta(t\cos\theta-r/v)}{(t^2-r^2/\beta^2)\sin^2\theta+(t\cos\theta-r/v)^2}$$

$$\times\frac{H(t-r/\beta)}{(t^2-r^2/\beta^2)^{1/2}}. \tag{14.55}$$

如果使θ变小且$x\to vt$，对于从$t=-\infty$传播开来的位错，这个方程简化为 (14.49)。换言之，在破裂峰到达时近场运动可近似地用方程(14.49) 中所给出的简单解加以解释。

然而，这个新解包含有一个发源于$t=0$的开始点的附加尖锐波形，并以剪切波速度传播。质点速度在$t=r/\beta$时变成无穷，此时它有一个平方根奇点。在$t=r/\beta$附近，(14.55)近似为

$$\frac{\partial w}{\partial t}\approx\frac{\Delta w}{2\pi}\frac{\sin\theta}{(\beta/v-\cos\theta)}\frac{1}{(2r/\beta)^{1/2}}\frac{H(t-r/\beta)}{(t-r/\beta)^{1/2}}. \tag{14.56}$$

这个波随距离按$r^{-\frac{1}{2}}$衰减，它代表一个发源于断层传播起始点的圆柱波，并展示出$\sin\theta/(\beta/v-\cos\theta)$的辐射图案。例如，沿$x$方向传播的断层，$x$方向是一个结。由(14.56) 给出的质点速度

$\partial w/\partial t$ 的波谱有一条 $w^{-\frac{1}{2}}$的高频渐近线。

与这个“开始相”有关的加速度在 $t=r/\beta$ 时也为无穷。奇异性的形式是$(t-r/\beta)^{-3/2}H(t-r/\beta)$，相应的谱有一条 $w^{\frac{1}{2}}$ 的高频渐近线。

如果滑动函数是一个斜坡函数[方程 (14.19)]而不是阶跃函数，那么质点速度的峰值就是有限的，但加速度峰值在 $t=r/\beta$ 时将有一个平方根奇点。

停止的影响可以通过迭加另一个运动位错来研究，比如说这个位错在 $x=L$，$t=L/v$ 处开始，以同样速度 v 传播，只是滑动符号相反，这将在 $x=L$ 前使断层湮没，并给出一个在 $x=0$ 处开始而停止在 $x=L$ 处的有限断层解。因而我们得到了另外一个从停止点开始以圆柱波传播的奇点。这个停止相的奇点本质上不是别的，而正是迭加上的第二个断层的“开始相”。

以上这种开始与停止的等效性正是由于断层传播的单向性质形成的。若破裂开始于一点并在一扩展面上增长，那么这两种影响将十分不同，正如在 14.1.6 节中对远场所讨论的那样。

14.2.4 切平面问题

最简单的切平面问题(图 14.20) 是以常速度 v 从 $-\infty$ 开始运动的半无限断层平面的问题。我们考虑一个以阶跃函数滑动的情况，边界条件为

$$u(x,+0,t)-u(x,-0,t)=\Delta u\cdot H(-x'), \quad (14.57)$$

此处 $x'=x-vt$。y 分量位移 $v(x,y,t)$和断层面上牵引力在 $y=0$ 两侧是连续的。

满足切平面问题运动方程的位移分量可用两个标量势写出：

$$u(x,y,t)=\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$v(x,y,t)=\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (15.58)$$

(见 5.1 节二维 P-SV 问题中有关两个标量势的推导)。势 ϕ 和 ψ 满足下列波动方程：

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},$$

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},$$

式中 $\alpha=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ 与 $\beta=\sqrt{\mu/\rho}$ 分别是 P 波和 S 波速度。利用运动坐标系[与(14.45)的推导相比较]，波动方程可改写为

$$\left(1-\frac{v^2}{\alpha^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0,$$

$$\left(1-\frac{v^2}{\beta^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

这里只考虑亚音速运动，即 $v<\alpha$ 和 $v<\beta$。

上述方程有如下形式的解：

$$\phi=\exp(ikx'\pm\sqrt{1-v^2/\alpha^2}ky)$$

和

$$\psi=\exp(ikx'\pm\sqrt{1-v^2/\beta^2}ky).$$

由于在无限远处没有波源，要求 ϕ 和 ψ 从 $y=0$ 处向外传播。于是对于 $y>0$，有

$$\phi=\phi^+\exp(ikx'-\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,|k|\,y),$$

$$\psi=\psi^+\exp(ikx'-\sqrt{1-v^2/\beta^2}\,|k|\,y), \qquad (14.59)$$

而对 $y<0$，有

$$\phi=\phi^-\exp(ikx'+\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,|k|\,y),$$

$$\psi=\psi^-\exp(ikx'+\sqrt{1-v^2/\beta^2}\,|k|\,y).$$

照例，我们用 ϕ^+，ψ^+，ϕ^-，ψ^- 通过(14.58)式来表示位移 u,v，而把应力分量 τ_{xy} 和 τ_{yy} 表示为

$$\tau_{yy}=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (14.60)$$

u 的不连续条件[见(14.57)]和 v，τ_{xy}，τ_{yy} 的连续性条件给出四个方程来求出四个未知量：ϕ^+，ψ^+，ϕ^{-1}，ψ^-。v 和 τ_{xy} 的连续性对$(\phi^+ + \phi^-)$和$(\psi^+ - \psi^-)$产生了如下的约束：

$$-\sqrt{1-v^2/\alpha^2}(\phi^+ + \phi^-) + i(\psi^+ - \psi^-) = 0,$$

$$2i\sqrt{1-v^2/\alpha^2}(\phi^+ + \phi^-) + (2-v^2/\beta^2)(\psi^+ - \psi^-) = 0.$$

此时系数行列式为

$$\begin{vmatrix} \sqrt{1-v^2/\alpha^2} & i \\ 2ik\sqrt{1-v^2/\alpha^2} & 2-v^2/\beta^2 \end{vmatrix} = -\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\cdot v^2/\beta^2,$$

且只要 $v \neq \alpha$，它就不会为零。所以必有

$$\phi^+ + \phi^- = 0,$$

$$\psi^+ - \psi^- = 0.$$

由此得出 $u(x,y,t)$和 $\tau_{yy}(x,y,t)$ 是 y 的奇函数，而 $v(x,y,t)$ 和 $\tau_{xy}(x,y,t)$是 y 的偶函数。因为函数 τ_{yy} 在 $y=0$ 处是连续的，则 τ_{yy} 在 $y=0$ 处一定变为零，即

$$\tau_{yy} = 0 \text{ 在 } y=0 \text{ 处.} \tag{14.61}$$

由于 u 是一个奇函数，不连续条件(14.57)可写成

$$u(x,+0,t) = -u(x,-0,t)$$

$$= \frac{\Delta u}{2} H(-x')$$

$$= -\frac{\Delta u}{4\pi}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{e^{ikx'}}{ik} dk, \tag{14.62}$$

其中 ε 是个小的正数。

由条件(14.61)和(14.62)，我们能对每一个 k 确定出 ϕ_+ 和 ψ_+，并把 u 和 v 表示为(14.59)对 k 的积分。对 $y>0$，结果是

$$u(x,y,t) = -\frac{\Delta u}{2\pi}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} \left[\frac{\beta^2}{v^2}\exp\left(-\sqrt{1-v^2/\alpha^2}|k|y\right)\right.$$

$$\left. - \frac{(\beta^2 - v^2/2)}{v^2}\exp\left(-\sqrt{1-v^2/\beta^2}|k|y\right)\right] e^{ikx'}\cdot\frac{dk}{ik},$$

$$v(x,y,t)=-\frac{\Delta u}{2\pi}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon}\Big[\frac{\beta^2}{v^2}\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\exp$$

$$\times(-\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,|k|y)$$

$$-\frac{(\beta^2-v^2/2)}{v^2\sqrt{1-v^2/\beta^2}}\exp\,(-\sqrt{1-v^2/\beta^2}\,|k|y)\Big]$$

$$\times i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Re}\,k)\cdot e^{ikx'}\frac{dk}{ik},$$

式中符号(Re k)表示 k 的实部。令 $y=0^+$，自然得到 $u(x,0,t)=(\Delta u/2)\cdot H(-x')$。被积函数随 k 和 y 呈指数衰减，表明在法平面情况下它们是非均匀平面波的迭加。所以，我们预言这些波是在断层面附近被截获的，并且随着至断层距离的增加而迅速衰减。分量 u 和 v 表现出相似的振幅谱。但在两分量间有一个 $\pi/2$ 的相位变化，这是因为 $v(x,y,t)$ 的被积函数中有因子 i。如果 $u(x,y,t)$ 相对 $x'=0$ 是反对称的，那么 $v(x,y,t)$ 将是对称的。不久我们将看到对于一个阶跃函数的滑动，横向位移分量 $v(x,y,t)$ 在 $x'=0$ 处有一个对数奇异性的脉冲形式。

为了避免在 $k=0$ 处有奇点，首先求出质点速度 $\partial u/\partial t$ 和 $\partial v/\partial t$ 的值。因为 $\partial/\partial t$ 在被积函数中引入了一个因子 $-ikv$ 而消除了奇异性，我们可令 $\varepsilon=0$。那么其积分或是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\,(ikx'-\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,|k|y)dk$$

$$=\int_0^{\infty}\exp(ikx'-\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,ky)dx+\int_{-\infty}^{0}\exp(ikx'$$

$$+\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,ky)dk$$

$$=\frac{2\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,y}{x'^2+(1-v^2/\alpha^2)y^2},\qquad(14.63)$$

或是

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\,\mathrm{sign}(k)\exp(ikx' - \sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,|k|\,y)\,dk$$

$$= \int_0^{\infty} i\exp(ikx' - \sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,|k|\,y)\,dk$$

$$- \int_{-\infty}^{0} i\exp(ikx' + \sqrt{1-v^2/\alpha^2}\,|k|\,y)\,dk$$

$$= \frac{2x'}{x'^2+(1-v^2/\alpha^2)y^2}. \tag{14.64}$$

还可立即辨认出(14.63)是$-2\arctan(\sqrt{(1-v^2/\alpha^2}\,y/x')$对$x'$的导数，而(14.64)则是$\ln[x'^2+(1-v^2/\alpha^2)y^2]$对$x'$的导数。利用这些关系，对$y>0$，我们得到质点速度为

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = -v\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x'}$$

$$= \frac{v\Delta u}{\pi}\left[\frac{\beta^2}{v^2}\frac{\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\cdot y}{x'^2+(1-v^2/\alpha^2)y^2}\right.$$

$$\left. - \frac{(\beta^2-v^2/2)}{v^2}\frac{\sqrt{1-v^2/\beta^2}\,y}{x'^2+(1-v^2/\beta^2)y^2}\right],$$

$$\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t} = -v\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x'} \tag{14.65}$$

$$= -\frac{v\Delta u}{\pi}\left[\frac{\beta^2}{v^2}\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\frac{x'}{x'^2+(1-v^2/\alpha^2)y^2}\right.$$

$$\left. - \frac{(\beta^2-v^2/2)}{v^2\sqrt{1-v^2/\beta^2}}\frac{x'}{x'^2+(1-v^2/\beta^2)y^2}\right]$$

而对$y>0$时的位移为

$$u(x,y,t) = \frac{\Delta u}{\pi}\left[\frac{\beta^2}{v^2}\arctan\frac{\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\cdot y}{x'}\right.$$

$$\left. - \frac{(\beta^2-v^2/2)}{v^2}\arctan\frac{\sqrt{1-v^2/\beta^2}\cdot y}{x'}\right], \tag{14.66}$$

$$v(x,y,t) = \frac{\Delta u}{\pi}\left\{\frac{\beta^2}{v^2}\sqrt{1-v^2/\alpha^2}\ln[x'^2+(1-v^2/\alpha^2)y^2]^{1/2}\right.$$

$$-\frac{(\beta^2-v^2/2)}{v^2\sqrt{1-v^2/\beta^2}}\ln[x'^2+(1-v^2/\beta^2)y^2]^{1/2}\Big\}.$$

首先获得上述公式的是 Eshelby(1949)，事实上，当 $y>0$ 和 $y<0$ 时公式都成立。arc tan 的取值范围是 $(-\pi, \pi)$，因此跨过 $y=0$ 处，当 $x'<0$ 时，在 u 内有一个大小等于 Δu 的阶梯间断。这就是断层面，且(14.66)正确地再现了(14.62)的间断。横向分量 $v(x, y, t)$表明为一个在 $x'=0$ 或 $x=vt$ 处具有对数奇异性 $\ln|x'|$的对称形式的脉冲。此结果与 14.2.1 节中所讨论的关于帕克菲尔德地震记录数值解的结果在定性上是一致的。

应力分量可从(14.65)与(14.59)得出为

$$\tau_{xx}=\frac{2\mu\Delta u\beta^2}{\pi v^2}\left[\frac{(1-v^2/\alpha^2)^{1/2}(v^2/\alpha^2-v^2/2\beta^2)y}{x'^2+(1-v^2/\alpha^2)y^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-v^2/2\beta^2)(1-v^2/\beta^2)^{1/2}y}{x'^2+(1-v^2/\beta^2)y^2}\right],$$
$$\tau_{yy}=\frac{2\mu\Delta u\beta^2}{\pi v^2}\left[\frac{(1-v^2/2\beta^2)(1-v^2/\alpha^2)^{1/2}y}{x'^2+(1-v^2/\alpha^2)y^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(1-v^2/2\beta^2)(1-v^2/\beta^2)^{1/2}y}{x'^2+(1-v^2/\beta^2)y^2}\right],$$
$$\tau_{xy}=\frac{2\mu\Delta u\beta^2}{\pi v^2}\left[\frac{(1-v^2/\alpha^2)^{1/2}x'}{x'^2+(1-v^2/\alpha^2)y^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(1-v^2/2\beta^2)^2x'}{(1-v^2/\beta^2)^{1/2}[x'^2(1-v^2/\beta^2)y^2]}\right].$$

正像边界条件(14.61)所规定的那样，在断层面 $y=0$ 上，$\tau_{yy}=0$，而 τ_{xy} 在 $y=0$ 上是连续的，其中

$$\tau_{xy}=\frac{2\mu\Delta u\beta^2}{\pi v^2x'}[(1-v^2/\alpha^2)^{1/2}-(1-v^2/2\beta^2)^2$$
$$\times(1-v^2/\beta^2)^{-1/2}]. \qquad (14.67)$$

这样，τ_{xy} 在裂纹尖端有一个$(x')^{-1}$的奇点，在尖端之后到达$-\infty$，而在尖端之前达到 $+\infty$。括号 [ ] 内的函数是一个熟悉的形式，它曾在确定均匀半空间内 Rayleigh 波的相速度的方程(5.54)

内出现过。当 v 等于 Rayleigh 速度时它为零。于是当裂纹尖端以Rayleigh速度传播时，跨断层面的切平面剪切应力为零。

对于质点速度，其结果与前面法平面问题中关于谱成分和随距离衰减所获结果十分类似。例如，速度峰值衰减对于两个分量都与到断层的距离成反比。在断层上，质点速度的水平分量是 δ 函数，而横向分量则正比于 $(x-vt)^{-1}$。两个函数具有同样的常数谱密度，只是在频率上它们都相差 $\pi/2$ 位相。离开断层，高频渐近线是指数衰减，正如对非均匀平面波所预计的那样。

现在让我们通过求解一个类似于法平面情况下已研究过的问题(图 11.20)来考虑切平面断层运动开始的影响。断层运动从 $x=0$ 处开始，并沿 x 方向以速度 v 传播。其边界条件为

$$u(x,+0,t)-u(x,-0,t)=\Delta u\cdot H(t-x/v)H(x), \quad (14.68)$$

与前面一样，v，τ_{xy}，τ_{yy} 是连续的。仍然使 u 和 τ_{yy} 是 y 的奇函数，而 v 与 τ_{xy} 是偶函数。那么可以推断 τ_{yy} 在 $y=0$ 时必为零，正如在断层从 $t=-\infty$ 处传播的情况那样(关于三维情况的一般性结果见问题 14.2)。

从势(14.58)和 Laplace 变换着手，例如

$$\phi(x,y,s)=\int\phi(x,y,t)e^{-st}dt,$$

如果势满足下列波动方程：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{s^2}{\alpha^2}\phi,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{s^2}{\beta^2}\psi,$$

则运动方程成立。

这些方程具有形式为 $e^{ikx\pm\gamma y}$ 与 $e^{ikx\pm\nu y}$ 的解，其中

$$\gamma^2=k^2+s^2/\alpha^2,$$

$$\nu^2=k^2+s^2/\beta^2.$$

关于 $u(x, +0, s)$的边界条件可通过取(14.68)的 Laplace 变换得到：

$$
\begin{aligned}
u(x,+0,s) &= -u(x,-0,s) \\
&= \frac{\Delta u}{2}\frac{e^{-isx/v}}{s}H(x) \\
&= \frac{\Delta u}{4\pi s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}\,dk}{i(k-is/v)}.
\end{aligned}
\tag{14.69}
$$

由这个条件及在 $y=0$处，τ_{yy} 变成零所确定的解为

$$
u(x,y,s) = -\frac{\Delta u}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\beta^2k^2}{s^2}e^{-\gamma y} - \frac{2\beta^2k^2+s^2}{2s^2}\times e^{-\nu y}\right)\frac{e^{ikx}\,dk}{i(k-is/v)},
$$

$$
v(x,y,s) = -\frac{\Delta u}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\beta^2}{s^2}ik\gamma e^{-\gamma y} - \frac{(2\beta^2k^2+s^2)}{2\nu s^2}\times ike^{-\nu y}\right]\frac{e^{ikx}\,dk}{i(k-is/v)}.
$$

以上积分的每一项，都能应用 Cagniard 方法。把变量 k 或是变换成

$$
\tau = \frac{1}{s}(-ikx+\gamma y),
$$

或是变换或

$$
\tau = \frac{1}{s}(-ikx+\nu y),
$$

并把最终的积分视为 Laplace 变换，我们得出下列结果：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\beta^2\Delta u}{\pi}\Bigg\{ &\mathrm{Im}\left[\frac{p_1^2[t\sin\theta + i\cos\theta(t^2-r^2/\alpha^2)^{1/2}]}{i/v-p_1}\right] \\
&\times\frac{H(t-r/\alpha)}{r(t^2-r^2/\alpha^2)^{1/2}} \\
&-\mathrm{Im}\left[\frac{(\frac{1}{2}\beta^2+p_2^2)[t\sin\theta + i\cos\theta(t^2-r^2/\beta^2)^{1/2}]}{i/v-p_2}\right] \\
&\times\frac{H(t-r/\beta)}{r(t^2-r^2/\beta^2)^{1/2}}\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{14.70}
$$

$$\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}=\frac{\beta^2\triangle u}{\pi}\left\{Re\left[\frac{(1/\alpha^2+p_1^2)p_1}{1/v-p_1}\right]\frac{H(t-r/\alpha)}{(t^2-r^2/\alpha^2)^{1/2}}\right.$$

$$\left.-Re\left[\frac{(\frac{1}{2}\beta^2-p_2^2)p_2}{1/v-p_2}\right]\frac{H(t-r/\beta)}{(t^2-r^2/\beta^2)^{1/2}}\right\},$$

其中

$$x=r\cos\theta,$$

$$y=r\sin\theta,$$

$$p_1=\frac{1}{r}(t^2-r^2/\alpha^2)^{1/2}\sin\theta+i\frac{t}{r}\cos\theta,$$

$$p_2=\frac{1}{r}(t^2-r^2/\beta^2)^{1/2}\sin\theta+i\frac{t}{r}\mathrm{sos}\theta.$$

上述公式是由 Ang 和 Williams(1959)获得的，Boore 与 Zoback (1974)用来解释 1971 年2月 9 日圣费尔南多地震时帕柯马(Paco--ima)大坝的加速度记录。

在远离原点处，断层附近的运动看上去应该像前面从方程(14.65)中得到的那样。事实上，若使 $y/r(=\sin\theta)$ 与 $r-vt$ 都很小，方程(14.70)就简化成(14.65)。即在破裂锋到达时刻，近场运动可近似地用(14.65)所给出的简单形式来解释。

方程(14.70) 包括了来自破裂起始点的作为 P 波和 S 波传播的附加到时。令 $t-r/\alpha$ 为小量，可找出如下形式的 P 波：

$$\begin{matrix}\dfrac{\partial u}{\partial t}\cos\theta\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t}\sin\theta\end{matrix}=\times\frac{\Delta u}{\pi}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\sin 2\theta}{2(\alpha/v-\cos\theta)}\frac{H(t-r/\alpha)}{(t-r/\alpha)^{1/2}(2r/\alpha)^{1/2}},\quad(14.71)$$

再令 $t-r/\beta$ 为小量，可求出如下形式的 S 波：

$$\begin{matrix}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\sin\theta\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t}\cos\theta\end{matrix}=\times\frac{\Delta u}{\pi}\frac{\cos 2\theta}{2(\beta v-\cos\theta)}\frac{H(t-r/\beta)}{(t-r/\beta)^{1/2}(2r/\beta)^{1/2}}.\quad(14.72)$$

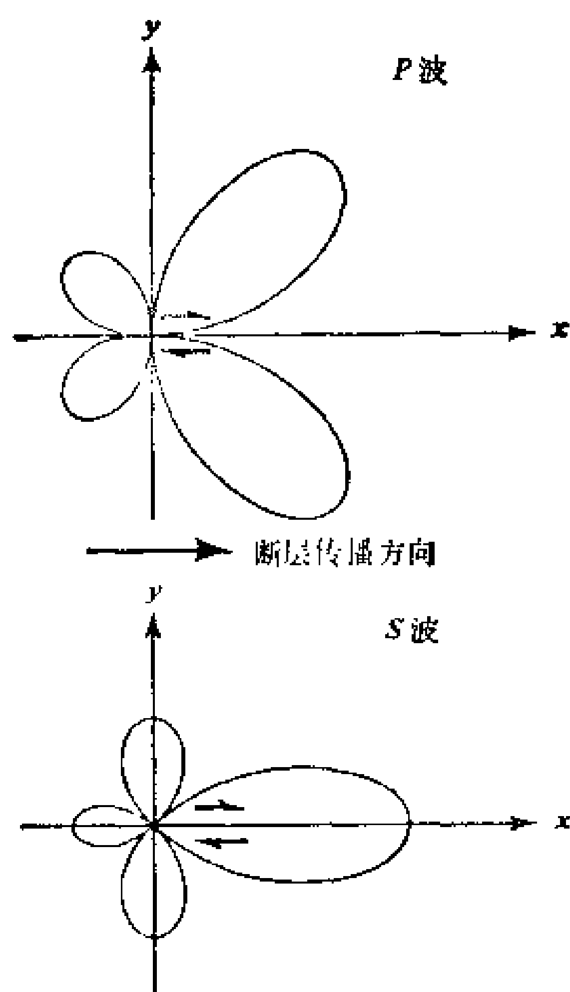


图 14.21
从一个传播切平面剪切断层的成核点辐射出的体波的辐射图案和通常双力偶辐射图案的对比（图4.5a与4.6a）

如图14.21所示，这些波的辐射图案有如双力偶的对称性，对于P波用因子 $(\alpha/v-\cos\theta)^{-1}$ 修正，对于S波用因子 $(\beta/v-\cos\theta)^{-1}$ 修正。它们是圆柱波，以 $r^{-\frac{1}{2}}$ 形式衰减。正如在法平面问题中那样，质点速度在开始处有一个平方根奇点。与这个“开始相”有关的加速度在开始处也是无穷大，它们有3/2次幂奇点。如果滑动函数是一个斜坡函数，质点速度峰值将是有限的，但加速度峰值在开始处将有一个平方根奇点。

正如前节所讨论的，断层传播的停止效应与单侧断层传播情况下的开始效应是相似的。

对于跨矩形断层上并具有均匀滑动函数的Haskell模型，Madariaga(1978)得到了一个在无界、弹性、均匀介质内任意点上运动的精确解析解。这个解的组成为：(i) 来自突然出现的长度为 W 的初始位错线和破裂突然停止的柱面波。(ii) 由矩形断层拐角处辐射出的球面波。柱面波在垂直于包含了断层平面的位错线的板状区域内占主导地位，并与由方程(14.56)，(14.71)与(14.72)给出的运动位错线产生的柱面波有相同的性质。

建议进一步阅读的文献

Aki, K. Earthquake mechanism. *Tectonophysics*, **13**, 423—446, 1972.

Haskell, N. Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **54**, 1811—1842, 1964; **56**, 125－140, 1966.

Honda, H. Earthquake mechanism and seismic waves. *Journal of Physics of the Earth*, **10**, 1－98, 1962.

Jeffreys, H. On the mechanics of faulting. *Geological Magazine*, **79**, 291－295, 1942.

Kanamori, H. Great earthquakes at island arcs and the lithosphere. *Tectonophysics*, **12**, 187—198, 1971.

Mansinha, L., D. E. Smylie, and A. E. Beck (editors). *Earthquake Displacement Fielas and the Rotation of the Earth*. New York: Springer-Verlag, 1970.

Savage, J. C. Corner frequency and fault dimensions. *Journal of Geophysical Research*, **77**, 3788－3795, 1972.

Trifunac, M. D. A three dimensional dislocation model for the San Fernando, California, earthquake of February 9, 1971. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **64**. 149－172, 1974.

Weertman, J. Dislocations in uniform motion on slip or climb planes having periodic force laws. *In* T. Mura (editor), *Mathematical Theory of Dislocations*. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1969.

问　　题

14.1　鉴别地下核爆炸与地震的最有效的方法之一是对所激发的短周期 P 波与长周期面波进行比较。如果一次爆炸和一次线源地震，都产生周期大约为 1 秒的类似的 P 波，那么观测到的 Rayleigh 波，由爆炸产生的比地震产生的小一个数量级(周期大致为 20 秒)。假定地震为一双力偶点源，爆炸为各向同性力矩张量点源，两者都掩埋在均匀半空间内。求证震源类型与震源深度差别(爆炸深度不会大于几公里)是否会引起激发出的 Rayleigh 波与 P 波有一个数量级的差别。若不是这样，别的什么效应才能解释这种观测结果？

14.2　在一个无限均匀、各向同性介质内，对于来源于一个平表面上一般剪切断裂的辐射，可从 (14.37) 推导出一些重要的对称特性。对于一个剪切断层，证明平行于断层平面的位移分量是距断层的距离 x_3 的奇函数，而垂直于断层的分量是 x_3 的偶函数。因此，在距离 x_3 处对平行 Σ 的平面上的牵引力，可证明其垂直分量为 x_3 的奇函数而剪切分量为 x_3 的偶函数。从而可证明平面型断层(在一个无限、均匀、各向同性介质内)上牵引力的垂直分量对于断层上任一剪切事件在任何时候都不会改变。

14.3　方程(14.43)相当于断层面上牵引力的一个动力学边界条件。在什么地方我们才考虑这个条件来建立像(14.37)那样的解的表达式？求证辐射场的这一表达形式对横跨断层的剪切应力必定是连续的(利用问题 14.2 的结果)。

14.4　裂纹开口可以用一个位移间断[u]来表示，[u]平行于 ν，与断层正交。求出各向同性物体内的等效体力，并找出无限均匀介质内的远场体波(P 和 S)(与方程(14.6)比较)。

14.5　在方程(14.18)—(14.20)中出现的“有限性因子” $X^{-1}\sin X$

是非常简单的，因为(i)破裂是单侧的（即它从断层的一端破裂到另一端）；(ii)它的破裂速度是常数；(iii)断层宽度 W 非常小；(iv)除了所考虑的破裂相对开始时间而造成的延迟外，断层面每一点上其滑动函数都是相同的。

a）若我们放弃假定(i)，(ii)，(iii)，但保留(iv)，可证明远场脉冲形状由 $\Omega(\mathbf{x},\omega)=\Omega_0(\mathbf{x},\omega)F(\gamma,\omega)$ 给出，其中 $\Omega_0(\mathbf{x},\omega)$ 是由强度为 $A\times\Delta u(\omega)$ 的剪切位错点源辐射出的脉冲形态。在这种更普遍的情况下，有限性因子是

$$F(\gamma,\omega)=\frac{1}{A}\iint_{\Sigma}\exp i\omega\left[\tau(\boldsymbol{\xi})-\frac{\boldsymbol{\xi}\cdot\gamma}{c}\right]d\Sigma.$$

式中 A 为断层面积，$\tau(\boldsymbol{\xi})$ 是所考虑的破裂到达断层面 $\boldsymbol{\xi}$ 所用的时间，而 $\boldsymbol{\gamma}$ 是从震源到接收点的射线方向。

b）在时间域内，证明 $\Omega(\mathbf{x},t)$ 是由一个具有单位"面积"的脉冲，即 $\int_{-\infty}^{\infty}F(\gamma,t)dt=1$，与 $\Omega_0(\mathbf{x},t)$ 的褶积给定的。

c）现在把假定(iv)也放弃掉，而用时间域内的单位面积，可证明相应的有限性因子为

$$F(\gamma,\omega)=\frac{1}{M_0(\omega)}\iint_{\Sigma}\mu(\boldsymbol{\xi})\Delta u(\boldsymbol{\xi},\omega)\exp$$
$$\times i\omega\left[\frac{-\boldsymbol{\xi}\cdot\gamma}{c}\right]d\Sigma,$$

式中 $M_0(\omega)=\iint\mu(\boldsymbol{\xi})\Delta u(\boldsymbol{\xi},\omega)d\Sigma$。

第十五章　震源动力学

至此，我们研究了具有给定滑动函数的传播位错的近场和远场地震运动。所采用的滑动函数，以最少的参数直观地模拟了地质断层运动。这样一来，第十四章所分析的一些滑动函数，其结果在实际上是不能接受的。

取法平面问题这样一种最简单情况，其中一个半无限断层正以均匀速度传播着（14.2.3 节）。当滑动函数是阶梯函数时，作用在断层平面上的剪切应力由方程(14.48)给定：

$$\tau_{yz}=-\frac{\mu\Delta w\sqrt{1-v^2/\beta^2}}{2\pi x'},\quad(令\ x'=x-vt)\qquad(15.1)$$

这表明剪切应力在断层平面内（$x'<0$）有非零值，且恰在裂纹尖端($x'=0$)之后达到无限。

由于断层运动是沿断层面的断裂，可以料到，一旦破裂发生，断层面是不能承受住超过摩擦应力的应力的。显然，阶梯函数的滑动是完全违反这种预料的。在本章中，我们将提出各种更好的办法，主要目的是找出这样的断层运动，它不仅在运动学上满足剪切断裂，而且也与断层面上似乎可能的应力相关连。

为了方便起见，本章划分为两个主要部分。第一部分我们假设破裂速度是被规定了的(通常，假定它有某一常数值)。对于法平面问题，我们得到了一个断层上滑动和剪切应力之间的简单关系。然后，我们将描述法平面和切平面断层运动的破裂阵面上能量平衡问题，并引入了内聚力的概念。作为起源于一个点的破裂传播的有用例证(且因之包含有法平面和切平面运动)，我们来考查一下生长中的椭圆断层的情况，对这种断层的辐射运动是详细

了解的。作为断层稳定生长(从一个点)而其后突然停止的一个例子，我们将描述已知最后半径的一个生长着的圆形断层，并利用一个重要的数字程序来求得远场运动。在第二部分我们认为剪切破裂是一个自发的过程，破裂速度本身是个未知(可能是变化的)量，把它作为求解问题的一部分来确定。对于各种法平面问题和一些切平面问题，破裂速度的函数关系是已知的。

15.1 裂纹以规定速度传播的动力学

15.1.1 传播着的裂纹其应力与滑动的关系

对于以常速度 v 传播的裂纹，为求出一个适当的滑动函数，我们将首先找出在一个传播法平面位错的断层面上应力和滑动之间的关系。

令滑动函数 $\Delta w(x')$ 是一个任意函数。我们用阶梯函数的叠加表示 $\Delta w(x')$，如图 15.1 所示。一个任意的 $\Delta w(x')$ 可写成

$$\Delta w(x') = -\int_{x'}^{0} \frac{\partial}{\partial \xi}\Delta w(\xi)\, d\xi$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \Delta w}{\partial \xi} H(\xi - x')\, d\xi. \qquad (15.2)$$

根据方程(15.1)，在 $x' = \xi$ 处有尖端的阶梯函数滑动 $H(\xi - x')$ 将产生一个应力分量 τ_{yz}，它由下式给出：

$$\tau_{yz}(x', \xi) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sqrt{1 - v^2/\beta^2}}{x' - \xi}.$$

上式乘以阶梯高度 $-(\partial \Delta w/\partial \xi)d\xi$ 并对 ξ 从 $-\infty$ 到零积分，得出由滑动函数 $\Delta w(x')$ 产生的应力为

$$\tau_{yz}(x') = -\frac{\mu}{2\pi}\sqrt{1 - v^2/\beta^2}\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \Delta w/\partial \xi}{x' - \xi}\, d\xi$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\sqrt{1 - v^2/\beta^2}}{v}\int_{-\infty}^{0} \frac{\Delta \dot{w}}{\xi - x'}\, d\xi, \qquad (15.3)$$

式中 $\Delta\dot{u}$ 是滑动速度。

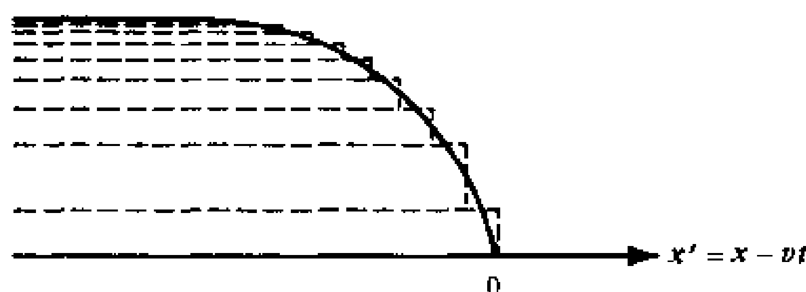


图 15.1
用阶梯函数的叠加来近似一个任意的滑动函数 $\Delta w(x')$

对于切平面问题，可以找到在断层面上剪切应力与滑动速度 $\Delta\dot{u}$ 之间有类似的关系。将相同的叠加应用于方程(14.67)，得出

$$\tau_{xy}(x')=-\frac{2\mu\beta^2}{\pi v^2}[(1-v^2/\alpha^2)^{1/2}-(1-v^2/2\beta^2)^2$$

$$\times(1-v^2/\beta^2)^{-1/2}]\int_{-\infty}^{0}\frac{\Delta\dot{u}}{\xi-x'}d\xi. \tag{15.4}$$

在(15.3)和(15.4)中，断层面上的剪应力等于滑动速度的 Hilbert 变换乘以一个常数。

一个函数与它的 Hilbert 变换是非常紧密相关的，由 Cauchy 定理可知，如果 $f(\xi)$ 是复平面 ξ 上闭合环 C 上或闭合环内的解析函数，那么，对于 C 上 $\xi=x$ 点，有

$$f(x)=\frac{1}{\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-x}d\xi.$$

对于 $f(\xi)=e^{ik\xi}(k>0)$，选择整个实轴与上半环作为环路 C，求得

$$ie^{ikx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik\xi}}{\xi-x}d\xi\quad k>0.$$

使等式两边实部与虚部分别相等，于是有

$$\cos kx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k\xi}{\xi-x}d\xi\quad k>0,$$

$$\sin kx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos k\xi}{\xi - x}d\xi \quad k>0.$$

因此 $\cos kx$ 是 $\sin kx$ 的 Hilbert 变换，而 $\sin kx$ 是 $k>0$ 时 $-\cos kx$ 的 Hilbert 变换. 结合 $k<0$ 的结果，一般说来，我们求出

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dx$$

的 Hilbert 变换是

$$g(x) = \int_{0}^{\infty} iF(k)e^{ikx}dk - \int_{-\infty}^{0} iF(k)e^{ikx}dk.$$

它们的振幅谱密度相同，而相位差为$\frac{\pi}{2}$。

于是在 $y=0$ 平面上的剪切应力与滑动速度必有相同的振幅谱密度，且相位差$\frac{\pi}{2}$。此外，在裂纹外（因为那里还没有滑动发生）滑动速度必定为零，而剪切应力在裂纹内必为零(为了简便起见，假定没有摩擦应力)。换句话讲，我们必须求得满足下式的 Hilbert 变换对 $f(x)$ 与 $g(x)$：

$$f(x)=0 \quad x>0,$$
$$g(x)=0 \quad x<0,$$

以及

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi - x}d\xi. \tag{15.5}$$

由 Hilbert 变换表，在非定义域内，对于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 求得了满足上述三个条件的下述结果：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x}} \quad x<0,$$

$$g(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}} \quad x>0.$$

只要将 ξ 扩展到一个复平面并沿负实轴做一分支割缝（图 15.2），

容易证明它们满足方程(15.5)，沿 AO 的积分就等于沿 OB 的积分，因为在两条路径上$\sqrt{-\xi}$的符号相反。对于 $x>0$，对在 $\xi=x$ 上的留数求值给出 $g(x)=1/\sqrt{x}$，但当 $x<0$，积分为零。这样，我们得出对于可移动的破裂，在裂纹尖端前缘应力平方根的奇异性以及破裂纹尖端之后滑动速度平方根的奇异性，需要去满足边界条件。对于一个静态破裂纹，应力平方根奇异性是已知的。

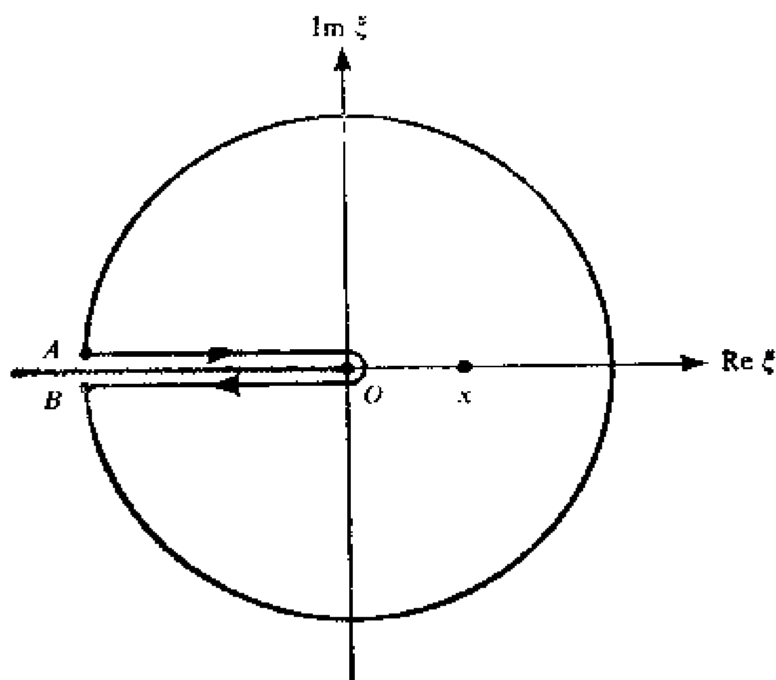


图 15.2

当$f(\xi)=1/\sqrt{-\xi}[H(-\xi)]$时(15.5)式的积分路径

通过对滑动速度积分，当 $x'<0$，得到滑动函数正对于 $\sqrt{-x'}$。现在，我们把法平面情况的结果概括为

$$\Delta w = A\sqrt{-x'}H(-x'),$$

$$\dot{w} = \frac{Av}{2\sqrt{-x'}}H(-x'),$$

$$\tau_{yz} = \frac{K}{\sqrt{2\pi x'}}H(x'), \qquad (15.6)$$

其中

$$K=\sqrt{2\pi}\,\frac{\mu A\sqrt{1-v^2/\beta^2}}{4},$$

切平面情况为

$$\Delta u=A'\sqrt{-x'}\,H(-x'),$$

$$\dot{u}=-\frac{A'v}{2\sqrt{-x'}}H(-x'),\qquad(15.7)$$

$$\tau_{xy}=\frac{K'}{\sqrt{2\pi x'}}H(x'),$$

其中

$$K'=\sqrt{2\pi}\,\frac{\mu A'\beta^2\left[(1-v^2/\alpha^2)^{1/2}-(1-v^2/2\beta^2)^2(1-v^2/\beta^2)^{-1/2}\right]}{v^2}.$$

K 和 K' 在断裂力学内称为应力强度因子。

补充 15.1

对于静态有限宽度为 $2a$ 的切平面和法平面的剪切裂纹的应力奇异性

沿平面位移 $W(X, Y)$ 的平衡方程由下式给出：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.\qquad(1)$$

对于由 $|x|<a$，$y=0$ 定义的裂纹平面及作用在 x，$y\to\infty$ 上的均匀应力 τ_∞，自由应力裂纹的边界条件是

$$\frac{\partial w}{\partial y}=0\quad |x|<a,\ y=0,\qquad(2)$$

和

$$w\to\frac{\tau_\infty}{\mu}y\quad 当\ x,\ y\to\infty.\qquad(3)$$

(这里取应力状态为位移的参考状态与本章及前一章许多动力学的解相比，这里参考状态刚好是在裂纹生长之前静应变状态。)

解析函数 $z=x+iy$ 的实部和虚部满足方程(1)，容易证明，

$$f(x+iy)=\frac{\tau_\infty}{\mu}[(x+iy)^2-a^2]^{1/2} \tag{4}$$

的虚部满足方程(1)，(2)，(3)，

$$w=\mathrm{Im}\,f(x+iy)$$

$$=\frac{\tau_\infty}{\mu}\mathrm{Im}\{[(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2]^{1/4}e^{i\theta/2}\}, \tag{5}$$

其中 $\sin\theta=2xy/[(x^2-y^2-a^2)^2+4x^2y^2]^{1/2}$。于是有

$$w=\frac{\tau_\infty}{\mu}\sqrt{a^2-x^2}\quad y=+0,\ |x|<a$$

$$=-\frac{\tau_\infty}{\mu}\sqrt{a^2-x^2}\quad y=-0,\ |x|<a. \tag{6}$$

在 $y=0$ 而裂纹之外的平面上应力为

$$\mu\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0}=\tau_\infty\frac{x}{(x^2-a^2)^{1/2}}\quad |x|>a. \tag{7}$$

这里，我们找出裂纹 $x=a$ 的两个端点上应力的平方根奇异性。应力强度因子是 $\tau_\infty\sqrt{\pi a}$，且随裂纹长度 a 的平方根而增加。上述解由 Knopoff(1958)给出。关于切平面剪切裂纹的一个解由 starr (1928) 给出，结果如下：

$$u=\frac{\tau_\infty}{2}\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\sqrt{a^2-x^2}\quad y=+0,\ |x|<a$$

$$=-\frac{\tau_\infty}{2}\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\sqrt{a^2-x^2}\quad y=-0,\ |x|<a \tag{8}$$

和

$$\tau_{xy}=\tau_\infty\frac{x}{(x^2-a^2)^{1/2}}\quad y=0,\ |x|>a. \tag{9}$$

请注意，当 $v=\beta$ 时，K 变为零。由于

$$K'=-\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,\mu A'\beta^2v^2(1-v^2/\beta^2)^{-1/2}R(1/v),$$

式中 R 是在(5.54)式中首次引入的 Rayleigh 函数，我们发现，破裂速度等于 Rayleigh 波速度 $v=c_R$ 时，在切平面裂纹的前沿，应力奇点消失。

在前章中，是从一个具有阶梯函数滑动的传播错位来研究地震运动的。既然我们已发现更合适的裂纹滑动函数形式为$\sqrt{-x'}$ $H(-x')$[而不是$H(-x')$]，我们应再考查一下断层附近的运动。利用方程（15.2），把移动裂纹的滑动函数表示为阶梯函数的叠加：

$$A\sqrt{-x'}H(-x')=\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{-\xi}}H(\xi-x')d\xi.$$

因为我们的系统是线性的，若相应于单位阶梯函数滑动为$H(-x')$的地震运动是$f(x', y)$，则对于可移动的裂纹运动$g(x', y)$将是

$$g(x',y)=\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{-\xi}}f(x'-\xi,y)d\xi. \tag{15.8}$$

利用这一关系，对于一个阶梯函数位错，由前面所获结果可得到法平面裂纹尖端附近的应力与运动。把方程(14.49)与(14.47)代入方程(15.8)中的$f(x',y)$内，则对于可移动的裂纹，其质点速度$\dot{w}$和应力分量τ_{yz}可写为

$$\dot{w}=\frac{Av}{4\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{-\xi}}\frac{\gamma yd\xi}{(x'-\xi)^2+\gamma^2y^2},$$

$$\tau_{yz}=\frac{A\mu}{4\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{-\xi}}\frac{\gamma(x'-\xi)d\xi}{(x'-\xi)^2+\gamma^2y^2},$$

其中$\gamma=\sqrt{1-v^2/\beta^2}$。两个积分都容易利用前面图15.2中所用相同的等值线来求值。现在，极点位于$\xi=x'\pm i\gamma y$，而在这些极点的留数为

$$\dot{w}=\frac{Av}{4\pi}\pi\left(\frac{1}{2i\sqrt{-x'-i\gamma y}}-\frac{1}{2i\sqrt{-x'+i\gamma y}}\right) \tag{15.9}$$

$$-\frac{Av}{4\sqrt{2}}\frac{(\sqrt{x'^2+\gamma^2y^2}-x')^{1/2}}{(x'^2+\gamma^2y^2)^{1/2}},$$

$$\tau_{xy}=\frac{A\mu\gamma}{4\pi}\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{x'+i\gamma y}}+\frac{1}{2\sqrt{x'-i\gamma y}}\right)$$

$$=\frac{A\mu\gamma}{4\sqrt{2}}\frac{(\sqrt{x'^2+\gamma^2y^2}-x')^{1/2}}{(x'^2+\gamma^2y^2)^{1/2}}. \qquad (15.10)$$

与阶梯函数位错的情况相反，质点速度的峰振幅随离开断层的距离按 $y^{-\frac{1}{2}}$ 衰减。裂纹运动较位错运动更平滑。在讨论其频谱的差别之前，我们将指出，在切平面裂纹和切平面阶梯函数位错问题中质点运动横向分量有很大的差别。

切平面阶梯函数位错质点速度的横向分量沿 $y=0$［在（14.65）中为 $\dot{v}(x, 0, t)$］具有 $f(x',y)=1/x'$ 的形式。利用（15.8）'这个裂纹的相应解答是(见图 15.3)

$$g(x',0)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{-\xi}}\frac{d\xi}{x'-\xi}$$

$$=\frac{-1}{2}\frac{1}{\sqrt{x'}} \qquad x'>0$$

$$=0 \qquad x'<0,$$

它与前面所获得切平面裂纹的剪切应力 τ_{xy} 有相同形式。值得注意的是，在裂纹内部质点速度的横向分量为零。然而，相应的位移在裂纹内部将是常数，但在裂纹前缘具有 $\sqrt{x'}$ 的形式。在阶梯函数滑动的情况下，位移的横向分量表现出一种对称的脉冲形式（$\sim\log|x'|$），如图 15.3 中所看到的那样，也正如 14.2.1 节中所提到的，在性质上它与帕克菲尔德地震所观测到的形式相一致。另一方面，裂纹的解并不显示出对称的脉冲形式，而是如图15.3所示的非对称拟阶梯形式：$\sqrt{x'}H(x')+$常数。

	切平面剪切裂隙	阶梯函数位错
横分量的质点速度	$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x'}}H(x')$	$-\frac{1}{x'}$
横分量的位移	$\sqrt{x'}\,H(x')$+常数	$\log\lvert x'\rvert$

图 15.3
对于一个剪切裂纹和一个阶梯函数剪切位错，垂直于断层平面上的质点速度和位移图

方程(15.8)表明 $g(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 与 $\frac{1}{2}\left(1/\sqrt{-x}\right)H(-x)$ 的褶积。对于 $k=\omega p>0$，后面函数的 Fourier 变换为

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{-x}}e^{-ikx}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{-x}}e^{-ikx}\,dx$$

（改变路径到负虚 x 轴）

$$=\frac{1}{2}e^{i\pi/4}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-ky}\,dy \quad (\text{令 } x=-iy)$$

$$=e^{i\pi/4}\int_{0}^{\infty}e^{-kz^{2}}\,dz \qquad (\text{令 } y=z^{2})$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{i\pi/4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\omega p}}\,e^{i\pi/4}.$$

因此，在频率域内，$g(x,y)$的振幅谱（由传播着的半无限裂纹引起的地震运动）与$f(x,y)$谱（由传播着的阶梯函数滑动位错所引起的地震运动）的$1/\sqrt{\omega}$成比例，且相位有$\frac{\pi}{4}$移动，这个在x坐标上的相位改变相当于在时间轴上滞后$\pi/4$。因为$1/\sqrt{\omega}$因子将使更高的频率衰减掉，由传播着的裂纹引起的运动比传播着的阶梯函数滑动的位错引起的运动更平滑。

15.1.2 裂纹尖端的能量分布

当裂纹尖端传播时，在断层面上发生滑动。不考虑摩擦，断层面上的牵引力在滑动正在发生的部位上为零。所以，裂纹除了克服摩擦所做的功之外，似乎并未做功。然而，更仔细地研究一下，就揭示出在裂纹尖端传播的每单位距离上做了有限的功。因为裂纹尖端正在运动，如何来计算这个功是不清楚的。我们先来效仿 Freund(1972) 导出的一个三维裂纹的普遍公式。为了使方程紧凑些，我们利用$x_i(i=1, 2, 3)$坐标，令裂纹平面在$x_2=0$处，并让裂纹尖端以速度v朝$+x_1$方向传播。如图 15.4 所示，考虑固定在固体上的一个外表面S_e、已形成一个裂纹面S_c及一个紧靠近裂纹尖端并随之传播的内表面S_t。

在由这三个曲面所围起来的体积V内，物体服从 Hooke 定律，运动方程与应变位移关系为

$$\tau_{ij}=c_{ijkl}e_{kl},$$

$$\rho\ddot{u}_i=\tau_{ij,j}, \qquad (15.11)$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}), \qquad (15.12)$$

式中τ_{ij}，e_{ij}，c_{ijkl}及u_i是应力、应变、弹性常数和位移分量。这里，假定不存在体力。

在曲面S_e和S_t上，牵引力T_i为

$$T_i=\tau_{ij}n_j,$$

式中n_j垂直于曲面且指向V的外部。

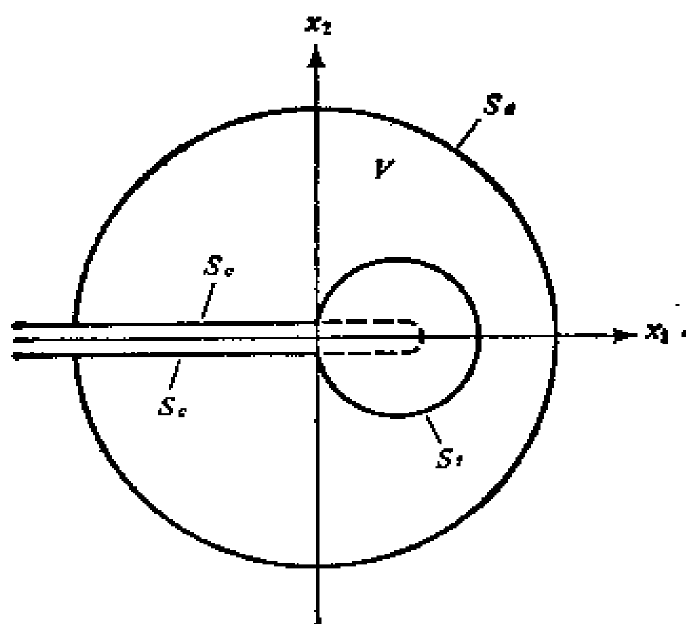


图 15.4

在 S_e 上牵引力的功率，动能的增加率及其在 V 内的应变能变化率分别是：

$$W=\int_{S_e} T_i \dot{u}_i dS,$$

$$\dot{K}=\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV,$$

$$\dot{U}=\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\tau_{ij} e_{ij} dV. \tag{15.13}$$

现在可以得到进入裂纹尖端的能流 g：

$$g=W-\lim_{S_t\to 0}[\dot{K}+\dot{U}],$$

它被当作为流入 S_t 内部的极限。

因为 S_t 是随裂纹尖端同时运动的，在方程(15.13)中，区域 V 是随时变而变化的。因此，$\dot{K}$ 和 $\dot{U}$ 都是由 V 内发生的能量变化和穿过边界 S_t 的能通量组成的。即

$$\dot{K}=\int_V \rho\, \dot{u}_i \ddot{u}_i dV+\int_{S_t} \frac{1}{2}\rho \dot{u}_i \dot{u}_i v_n dS,$$

(利用 $\tau_{ij}=\tau_{ji}$),

$$\dot{U}=\int_V \tau_{ij}\dot{u}_{i,j}dV+\int_{S_t}\frac{1}{2}\tau_{ij}u_{i,j}v_n dS$$

式中 v_n 是在 S_t 上一点速度的垂直分量。用$(\tau_{ij}\dot{u}_i)_{,j}-\tau_{ij,j}\dot{u}_i$ 代替 $\dot{U}$ 的头一个被积函数，并将散度定理应用于 $\int_V(\tau_{ij}\dot{u}_i)_{,j}dV$，求得

$$\begin{aligned}\mathscr{G}&=\int_{S_e}T_i\dot{u}_i dS-\lim_{S_t\to 0}\left[\int_V(\rho\dot{u}_i\ddot{u}_i-\tau_{ij,j}\dot{u}_i)dV+\int_{S_e+S_c}\right.\\&\left.\times\tau_{ij}n_j\dot{u}_i dS+\int_{S_t}\left(\tau_{ij}n_j\dot{u}_i+\frac{1}{2}\tau_{ij}u_{i,j}v_n+\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i v_n\right)dS\right]\\&=-\lim_{S_t\to 0}\int_{S_t}\left(\tau_{ij}n_j\dot{u}_i+\frac{1}{2}\tau_{ij}\dot{u}_{i,j}v_n+\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i v_n\right)dS,\end{aligned}\tag{15.14}$$

这里我们利用了(15.11)和(15.12)。由于 $v_n=0$，且因为裂纹表面是牵引力的自由表面，所以来自 S_c 的贡献为零。(正如本节开始所提到的，我们如此选择是为了忽略掉摩擦力的影响。)

现在，回到随尖端运动的坐标系(x',y) 上，选择如图 15.5 所示的矩形表面作为 S_t。矩形边长在 x 方向上为 2δ，在 y 方向上为 $2e$。如果我们把宽度 e 减少到零，则来自 $x=\pm\delta$ 两边的贡献为零。因此，在 $y=\pm e$ 上 v_n 为零，于是方程(15.1)简化为

$$\mathscr{G}=\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}T(x',0)\cdot[\dot{u}(x',+0)-\dot{u}(x',-0)]dx'.$$

因此，把方程(15.6)代入上述积分，求得法平面情况下的功率为

$$\mathscr{G}=\frac{AvK}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{H(-x')}{\sqrt{-x'}}\frac{H(x')}{\sqrt{x'}}dx',$$

面对切平面情况利用方程(15.7)，得到

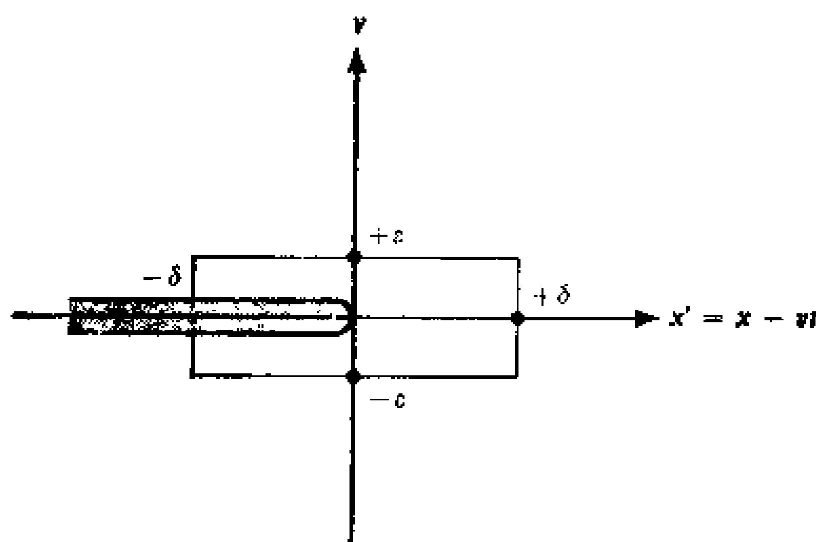


图 15.5

$$g = \frac{A' v K'}{2\sqrt{2\pi}} \lim_{\delta \to 0} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{H(-x') H(x')\, dx'}{\sqrt{-x'}\sqrt{x'}}.$$

在上述公式中，被积函数除了在 $x'=0$ 处外均为零。而在 $x'=0$ 处，因 $H(0)=\frac{1}{2}$，它等于无穷。实际上，被积函数的性质像一个 δ 函数。为了证明这一点，我们考虑下列积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(x') H(x-x')}{\sqrt{x'}\sqrt{x-x'}}\, dx' = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{x'}\sqrt{x-x'}} = \pi H(x).$$

(见补充 12.1)于是得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(x')}{\sqrt{x'}} \frac{H(-x')}{\sqrt{-x'}} dx' = \pi H(0) = \frac{\pi}{2}.$$

因此，对法平面裂纹，在裂纹尖端所消耗的功率是

$$g = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A v K}{4} = \frac{v K^2}{2\mu}\left(1 - \frac{v^2}{\beta^2}\right)^{-1/2}, \qquad (15.15)$$

而对切平面裂纹为

$$g = \frac{v}{8} \frac{v^2 K'^2}{\mu \beta^2} \left[\left(1 - \frac{v^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{v^2}{2\beta^2}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{\beta^2}\right)^{-1/2}\right]^{-1}.$$

(15.16)

上述结果亦可以不利用在 $x=0$ 处的 $H(x)$ 值来得到。从方程(15.9)与(15.12)得到关于法平面裂纹的应力和质点速度，(15.14)中被积函数的第一项由下式给定：

$$2\tau_{yz}(x',y)\dot{w}(x',y)=\frac{vK^2\gamma}{2\pi\mu(x'^2+\gamma^2y^2)},$$

式中 K 是前面定义的应力强度因子，而 $\gamma=\sqrt{1-v^2/\beta^2}$。把 $y=\pm\varepsilon$ 代入上述公式，并以 $x'=-\delta$ 积分到 $x=+\delta$，则得

$$g=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\delta\to0}\frac{vK^2}{\pi\mu\gamma}\arctan\left(\frac{\varepsilon}{\delta\gamma}\right)=\frac{vK^2}{2\mu\gamma},\qquad(15.17)$$

它证实了(15.15)给出的结果。

补充 15.2

破裂准则

因为绝大多数物质在应力超过一定临界值后就会破裂，自然可用一个临界作用应力或物质强度来描述破裂的条件。然而，后来发现对于给定物质，断裂强度变化很大，且围绕强度作为物质常数的这个概念所建立起来的理论并不能解释断裂特征的多样性。

A. A. Griffith 在 1920 年取得重大进展，他假定在裂纹形成的物质内存在有一裂痕。要产生新破裂表面就需要增加自由表面能。这个能量必定是由破裂延伸到的周围介质提供的。Griffith 的破裂准则建立在如下的基础之上：所消耗的表面能与提供给裂纹长度无限小的虚扩展的机械能相平衡。在本节中，我们正好计算出裂纹尖端以一个常速度[(15.15)与(15.16)]运动时供给裂纹尖端机械能的变化率。在 15.2.1 节，我们将利用 Griffith 的能量平衡概念来导出裂纹尖端(15.53)的运动方程。

此外，断裂力学是由 G. R. Irwin 及其助手在 1950 年前后围绕应力强度因子概念建立起来的。已发现 Griffith 破裂准则相当于存在一个临界应力强度因子。若应力强度因子超过临界值，裂纹将扩展开。我们称之为 Irwin 准则。

在方程(15.15)和(15.16)中，我们已证明进入裂纹尖端的能流是

由应力强度因子 K 或 K' 及破裂传播速度确定的。所以，在裂纹扩展开始阶段，当 $v=0$ 时，能流和应力强度因子是唯一相关的，这证明了 Griffith 和 Irwin 准则的等价性。令 $v=0$，对于法平面裂纹(15.22)及对切平面裂纹(15.79)，明显地表现出等价关系。

对于有限破裂速度 v，Griffith 表面能和临界应力强度因子都可能与 v 相关。在 15.2.2 和 15.2.3 节中，我们将考虑两个准则。在 Griffith 准则中，假定表面能与 v 无关。在 Irwin 准则中，假定临界应力强度因子与 v 无关。图 15.21 比较了两种准则所获得的裂纹尖端活动。

在法平面裂纹的情况下，当 $K=0$，即当破裂速度等于剪切波速度时，裂纹尖端的能流等于零。在切平面情况下，当破裂速度等于 Rayleigh 波速度时它等于零。因此，在这些速度的情况下，裂纹产生新表面所需要的能量不能够供应到裂纹尖端。在这个意义上，它们是裂纹传播的极限速度。方程(15.16)表明，若破裂速度超过 Rayleigh 速度，$\mathscr{G}$ 变成负值。换言之，裂纹尖端变成了一个能流源而不是一个能汇。这在实际上是不能成立的，而且切平面剪切裂纹的速度不能超过 Rayleigh 波速度。但是，这一结论将在 15.2.3 节中加以修正。在那里，我们将讨论具有有限内聚力的介质内破裂的传播问题。

15.1.3 内聚力

在 15.1.1 节中得到的在传播裂纹尖端附近的应力和质点速度的解仍然很不切合实际，因而二者在裂纹尖端都变成了无限。任何介质都有一个有限强度，不可能承受超过一定限度的应力。然而，通过引入由 Barenblatt(1959)定义的内聚力都能够消除奇点，内聚力分布在尖端附近的裂纹内，并且它反抗着外部的应力。

我们来考虑法平面裂纹的情况，并令在破裂表面($x'\leqslant 0$)上总的牵引力为

$$\sigma_{yz}(x',0)=\sigma_{yz}^{c}+\sigma_{c}(x'). \tag{15.18}$$

式中 σ_{yz}^{d} 是动摩擦引起的并作用于整个裂纹面上，但内聚力（单位面积）$\sigma_c(x')$ 只在 $-d < x' \leqslant 0$ 时为非零值，其中 d 是终止地区的长度，如图 15.6 所示。内聚力的分布在裂纹尖端的前缘产生集中力 τ_{yz}，并有由下式给出的应力强度因子

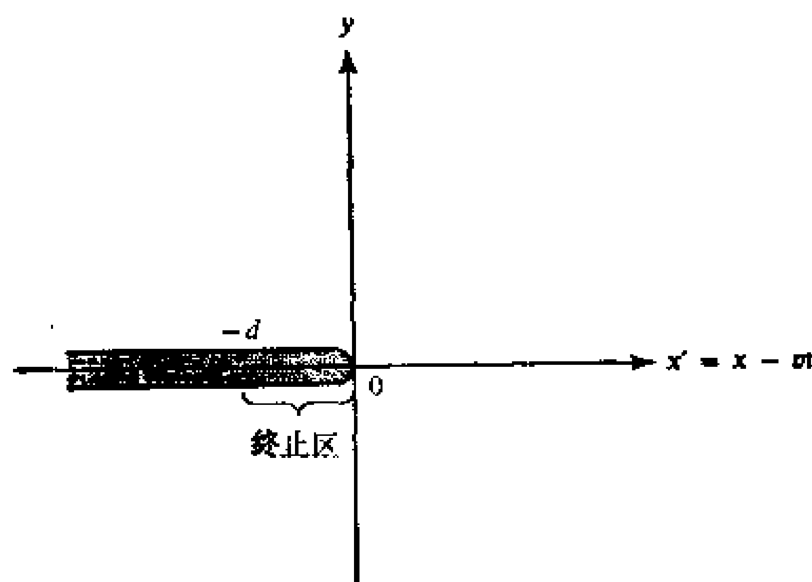


图 15.6

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-d}^{0} \sigma_c(\xi)(-\xi)^{-1/2}d\xi. \tag{15.19}$$

上述表达式的推导在补充 15.3 中给出。若我们令内聚力 $\sigma_c(\xi)$ 满足下述条件：

$$K = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-d}^{0} \sigma_c(\xi)(-\xi)^{-1/2}d\xi, \tag{15.20}$$

则因外部应力造成的最初应力的奇点也许可以消除掉。选择这种 $\sigma_c(\xi)$，应力分量 $\sigma_{yz}(x', 0)$ 将是有限的且在裂纹尖端连续。因为滑动速度 $\Delta\dot{w}$ 是剪切应力的 Hilbert 变换与一个常数的乘积，见方程（15.3），若此处剪切应力连续的话，那么 $\Delta\dot{w}$ 的奇点也就消除了。

如果 d 是小量，由内聚力所引起的弹性场被限制在裂纹尖端附近，且并不影响紧接裂纹尖端邻区以外的场。那么通过外表面进入裂纹尖端的能流将与无内聚力情况下由（15.15）所给出的能流相同。这种能流被吸收后又产生了一个新的裂纹表面。把这种每单位面积上的表面能记为 G，于是有

$$g = 2\,Gv, \tag{15.21}$$

式中因子 2 说明裂纹的两个面。从（15.15）和（15.21），得出

$$G = \frac{K^2}{4\,\mu}\left(1-\frac{v^2}{\beta^2}\right)^{-1/2} \tag{15.22}$$

（对切平面剪切裂纹利用（15.16），可以获得类似的关系。）

为了粗略估计由于裂纹传播引起的地震运动内所包含的最高频率，我们将假定内聚力均匀地分布在裂纹终止区。相应的应力强度因子是

$$K = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-d}^{0}\sigma_c(-\xi)^{-1/2}\,d\xi = \frac{2\,\sigma_c}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2\,d}, \tag{15.23}$$

式中 σ_c 是单位面积上的内聚力，把（15.23）代入（15.22），求得

$$G = \frac{2\,\sigma_c^2 d}{\mu\pi}\left(1-\frac{v^2}{\beta^2}\right)^{-1/2}. \tag{15.24}$$

这个方程给出了确定裂纹尖端周围的地震运动的重要量之间的关系，对于这种关系，我们知道的非常少。一般地讲，G，σ_c 和 d 也许取决于破裂速度。

由于 d 是这样一种距离的量度，即在此距离上滑动受阻，d 越长，在初始阶段滑动越慢。所以，当 d 变得较短时，可预料有较高的滑动速度和加速度。特征时间常数 t_d 可以由 d/v 给出：

$$\begin{aligned} t_d &= d/v \\ &= \frac{\pi\mu G[1-(v^2/\beta^2)]^{1/2}}{2\,\sigma_c^2 v}. \end{aligned} \tag{15.25}$$

这是控制地震波谱最高频率的时间常数。在实验室内岩石样品的

静态试验给出 G 的量级为 10^3 尔格/厘米^2，σ_c 量级为 10^9 达因/厘米^2。为了做出一个粗略的估计，假定在动力学情况下它们的数量级是相同的，因此，对于 $\beta=3.5$ 公里/秒，$v=3$ 公里/秒，及 $\mu=3\times10^{11}$ 达因/厘米^2，得到

$$t_d\approx 10^{-9}\text{ 秒}.$$

因此，假如实验室的数值是可用的话，我们预料辐射的地震波频率可高达千兆赫。

在野外实际情况下，G 可以随裂纹长度而增加，裂纹尖端周围的应力随裂纹的长度的增加而增加（如补充 15.1 所表明的，对于较大的裂纹，静态应力强度因子将增大）从而微裂缝区的体积和塑性变形将增大。这个区域将吸收能量，使得越大的地震 G 值越大。

通常地震记录中包含的最高频率是 100 赫量级。假定在实际断层泥内的内聚力 σ_c 的数量级为 10^8 达因/厘米^2，由 (15.25) 知，相应于 $t_d=0.01$ 秒的 G 值将是 10^8 尔格/厘米^{2}左右，这较实验室值大许多数量级。

假使我们用本构方程的形式写出它，以代替方程 (15.18)，那么内聚力的物理意义可以变得更清楚，例如象

$$\sigma_{yz}(x',\ 0)=\sigma_{yz}^d+\sigma_c[\Delta w(x')] \quad x'\leqslant 0$$

式 (15.26)

$$\sigma_{yz}(x',\ 0)=\sigma_{yz}^d+\sigma_c[e(x')] \quad x'\leqslant 0,$$

式中 e 是断层泥内的塑性应变，而 Δw 是相应于塑性应变的断层面间的等效滑动。如果断层泥的宽度是 b，可以认为 $\Delta w=be$。单位表面能 G 表示为 $G=\frac{1}{2}\int_0^\infty\sigma_c(D)dD$，其中因子 $\frac{1}{2}$ 说明裂纹具有两个表面。关系式 (15.26) 可以用岩石样品的应力-应变关系的实验研究与断层泥宽度的野外研究来加以确定，让 σ_c 依赖于 $\Delta\dot{w}$ 以及 Δw 也许是适当的。一旦关系式已知，滑动函数就可用迭代法来计算。我们从最初设想的滑动函数 $\Delta w(x')$ 出发并由

(15.26) 得出相应的内聚力。那么能够从 (15.20) 计算出应力强度因子K。在与终止区域的尺度相比距裂纹尖端足够远的距离上，内聚力不在控制滑动函数，而代之由宏观裂纹参数，例如象形态、长度、应力降等确定。对于$-\infty<x'<\infty$，已知σ_{yz}，滑动速度能够用 Hilbert 变换[见方程 (15.3)] 得出。最终的滑动函数将用来作为修正内聚力的第二次试验函数．迭代过程持续到滑动函数收敛于最后的解。井田 (Ida，1972，1973) 利用这种方法对各种情况的内聚力因$\sigma_c(\Delta w)$ 计算了滑动函数和它的时间系数（假定以一个具有常数应力降的半无限裂纹作为宏观模型），并且他依据这种物质性质讨论了最大加速度和速度。Andrews (1976) 推广了井田的工作并将内聚力归并到在裂纹传播的有限差分计算之中（见 15.2.3 节中的讨论和图 15.26)，这成了一种把裂纹传播的数值分析与岩石力学实验结果相结合的有希望的途径。

15.1.4 增长的椭圆裂纹的近场

在 14.1.6 节中，我们从一个以常速度增加并保持有同样形状的椭圆裂纹出发研究了运动体纹。不考虑终止相位，我们发现远场位移的初始上升部分正比于由初动量出的时间平方。相应的加速度在初动上显示出一个有限的跳跃间断。在本节我们将研究增长的椭圆裂纹的近场地震运动。

开始我们假定一个均匀的应力状态σ^0，并设平面剪切裂纹在时间$t=0$时成核于原点。断层表面$S(t)$ 定义为直角坐标中的椭圆

$$S(t)=[x_3=0: x_1^2/u^2+x_2^2/v^2\leqslant t^2],$$

它的轴（见图 15.7）以速度u和v稳定增长，u和v都小于(或等于）剪切波速度β。横跨$x_3=0$平面的剪切应力受成核作用点发射的波的影响，但在破裂到达后，它们降到了$S(t)$ 以上的一个指定的新值。

为了进一步描述这个问题，令u为初始（预加应力、静态)

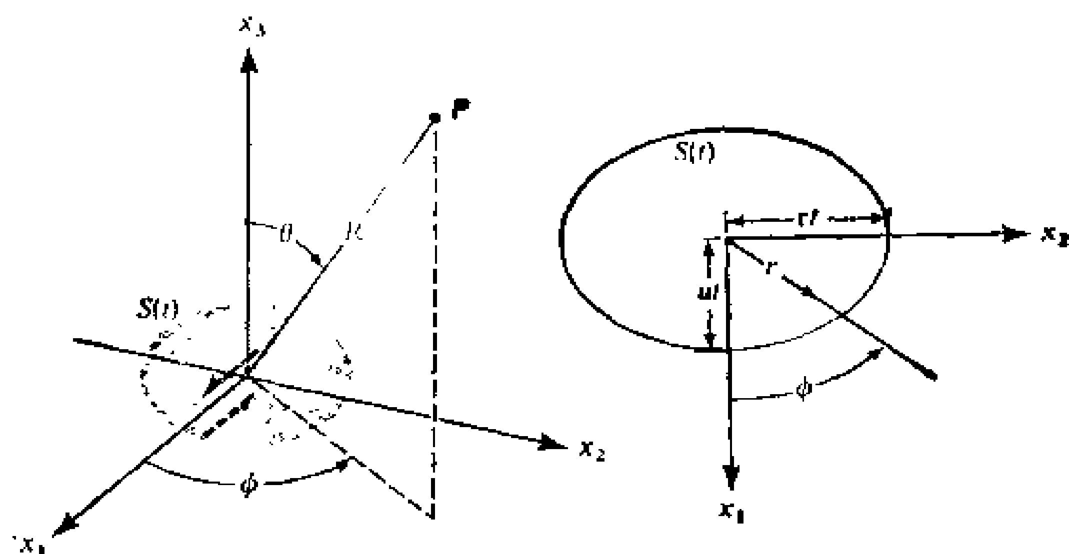


图 15.7

位置的位移，用 τ 表示由于 u 引起的应力能量（所以 $\sigma^0+\tau$ 是总应力）。在一个无限均匀介质内，对于 $x_3=0$（见问题 14.2)的裂纹平面，u 和 τ 一定具有对称特性：从方程（14.37）或一个类似于在切平面问题中所利用的论证（14.2.4 节），当横跨裂纹平面的间断性被局限于平行位移时，发现 τ_{33}，u_1 和 u_2 是 x_3 的奇函数。所以它们无论在 $x_3=0$ 的什么地方都连续，其值必为零，因而有下列边界条件：

$$\tau_{33}=0，在 x_3=0 的每一处， \tag{15.27}$$

和

$$u_1=u_2=0，在 x_3=0 上而在 S(t) 外. \tag{15.28}$$

Burridge 和 Willis（1969）对横跨一个增长着的椭圆剪切裂纹上的滑动函数求得了下列简单解：

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\left(t^2-\frac{x_1^2}{u^2}-\frac{x_2^2}{v^2}\right)^{1/2}$$

在 $x_3=+0$ 和 $S(t)$ 上

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

在 $x_3=+0$ 但在 $S(t)$ 之外，　(15.29)

在条件（15.27）和（15.28）下，由这一滑动函数产生的弹性场的确给出了在 $S(t)$ 上剪切应力突变（τ_{13}，τ_{23}），它在时间与空间上为常数。求得 τ_{13} 正比于 a 及 τ_{23} 正比于 b，其中 a，b 为裂纹中心的质点速度分量，如由（15.29）所看出的。为了简单起见，我们取 x_1 轴为最大初始剪切方向，以便在应力分量 τ_{23} 中无应力降产生。在这种情况下 $b=0$，滑动分量 u_2 为零。在断层的运动部分上，τ_{13} 是常数，依据 Coulomb 摩擦定律，通过摩擦动力系数我们可以把总的剪切应力 $\sigma_{13}^0+\tau_{13}$ 看成与 σ_{33}^0 成正比。

根据 Richards（1973，1976），我们按下列步骤计算从增长着的裂纹辐射出的弹性场：

i）对 x_1 和 x_2 进行 Fourier 变换；对 t 做 Laplace 变换，

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)\rightarrow f(k_1,\ k_2,\ x_3,\ s),$$

式中 f 是任意感性趣的因变量（例如一个位移分量）。于是在 $x_3=0$ 上的边界条件转变成

$$\tau_{33}=0,\ \ u_1=\frac{4\pi auv}{(s^2+k_1^2u^2+k_2^2v^2)^2},\ \ u_2=0.$$

ii）变换波动方程并利用位势以导出 $\boldsymbol{u}$（k_1，k_2，x_3，s）的代数表达式。取二重 Fourier 逆变换，产生一个 Laplace 正变换作为在整个（k_1，k_2）平面上的重积分显式。（k_1，k_2）平面对变量（w，q）的旋转和伸长是通过关于 Hoop 变换来实现的，

$$k_1=(s/\alpha)(q\cos\phi-w\sin\phi),$$

$$k_2=(s/\alpha)(q\sin\phi+w\cos\phi),$$

式中 α 是 P 波速度。于是在位置 x 上位移的 P 波分量 Laplace 变换有如下形式：

$$\boldsymbol{u}^P(\mathbf{x},\ s)=(1/s^2)\int_0^{\infty}dw\int_{-\infty}^{\infty}dq\boldsymbol{F}(q,\ w,\ \phi)e^{-st},\quad(15.30)$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 为已知，$t=t(q,\ w,\ \theta)\equiv[-iq\sin\theta+(1+q^2+w^2)^{\frac{1}{2}}\cos\theta](R/\alpha)$，而关于 $\mathbf{x}$ 的球极坐标（R，θ，ϕ）如图 15.7 所示。

可以证明，对于在（15.30）中的积分来讲，只有正的实 q 轴是所需要的。对 S 波分量存在有相类似的表达式。

iii）应用 Cagniard 方法，交换 Laplace 变换中 q 积分和 w 积分次序结果在时间域内位移可认为是 w 的一个单积分。由于被积函数 $\boldsymbol{F}$ 的奇异性而增加了复杂性，见图 15.8。这是一个复数 q 平面图，并且表明了在（15.30）内需要积分的实轴路径与 Cagniard 路径[在（15.30）内指数 t（q，w，θ）是实数]之间，被积函数有极点。事实上，它是个二阶极点，记做 q_{uv}，归因于震源的运动性质，在变换到 Cagniard 路径前找出留数是必要的，结果给出公式为

$$\boldsymbol{u}^{P}(\mathbf{x},\ s)=\frac{1}{s^2}\int_0^{\infty}dw\int_0^{\infty}dt\boldsymbol{F}(q(t),\ w,\ \phi)e^{-st}\frac{dq}{dt}$$

$$+\int_0^{\infty}dw\boldsymbol{R}(q_{uv},w,\phi,s)e^{-st}(q_{uv},w,\theta),\qquad(15.31)$$

这里右边的第一项，能够按一般方法变换到时间域（即通过变换积分顺序并把结果看成 Laplace 正变换），从而得到一个关于 w 的单积分。(15.31)式右边第二项已经是一个时间函数的 Laplace 变换形式，结果为一个代数闭式的表达式。这种方法，即由一个留数积分得出代数表达式，最先是由 Gakenheimer 和 Miklowitz (1969) 提出的，并曾把它用于解决具有运动源的 Lamb 问题。

完整的地震图只能用数值进行计算。图 15.9 表示了靠近一个左旋走滑断层加速度的 x_1 与 x_3 分量的一段理论记录。4 个台站的坐标是（1，1.5，0.5），（4，1.5，0.5），（7，1.5，0.5）与（10，1.5，0.5）。介质密度为 2.7 克/厘米^3，P 波速度是5.2 公里/秒，S 波速度是 3 公里/秒。在 x_1 方向上破裂速度是 Rayleigh 波速度的 90%，而在 x_3 方向上则是 S 波速度的 90%。在这种情况下，我们看到小的 P 波，来自成核作用点到达的陡的类似阶梯状的 S 波以及与裂纹尖端的推移相关联的大加速度。来自成核作用点波的振幅随距离而减小，而与裂纹尖端推移相联系的

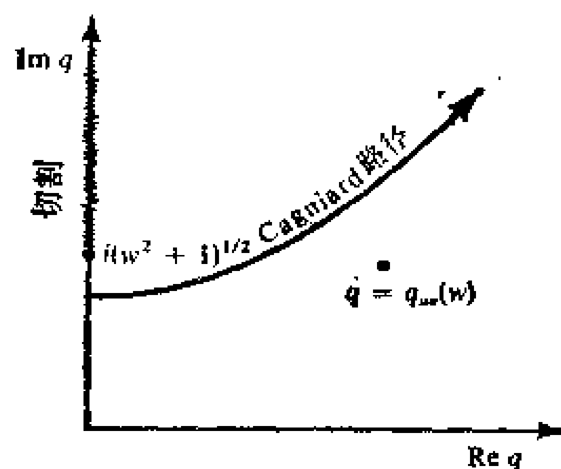


图 15.8
在用于求积分（15.30）的 Cagniard 路径附近有一个极点 q_{sp}（引自 Richards, 1976 a）

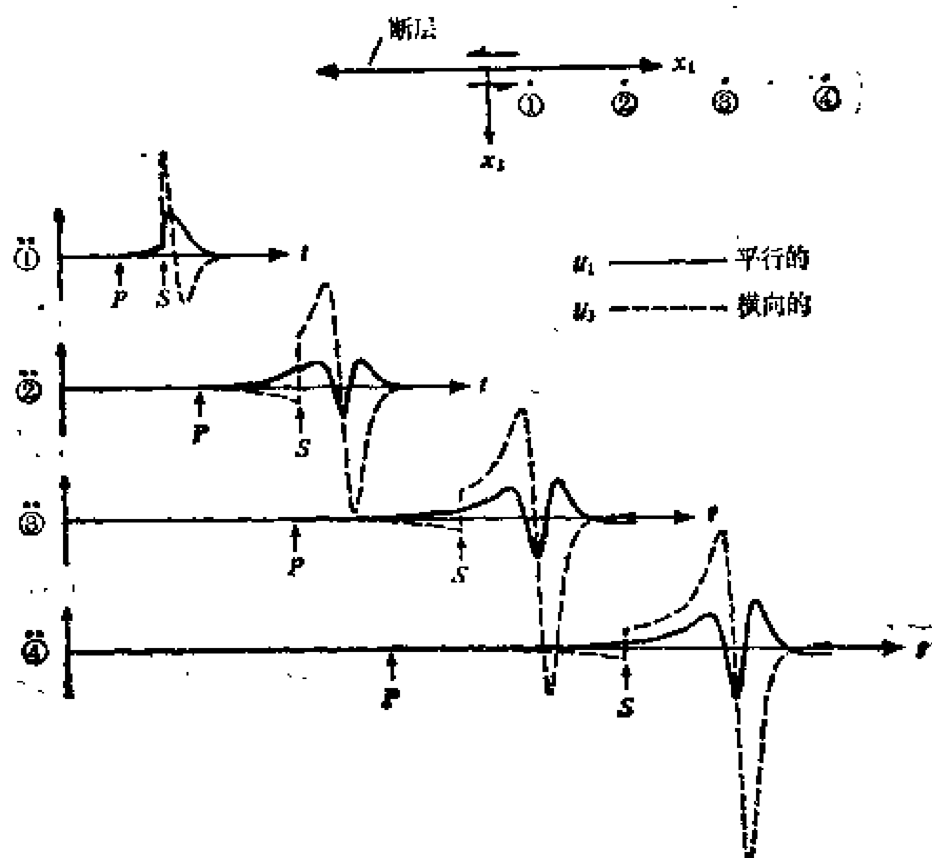


图 15.9
在如图顶部所示的台站上加速度的 x_1 与 x_3 分量的合成地震图（引自 Richards, 1976 a）

加速度却增加，这是因为应力强度因子随裂纹长度的增加而增加的缘故。

相应的位移记录如图 15.10 所示。正如在 15.1.1 节中所讨论的，横向分量呈阶梯状波形，而不是对称形式的脉冲。水平分量表明来自成核点的P波到达开始有一个非常缓慢的上升，但并没有表现出任何和破裂阵面推进有关的尖锐标记。这说明对于在裂纹平面以外的点测量到的位移，很难用来准确的估计破裂速度。

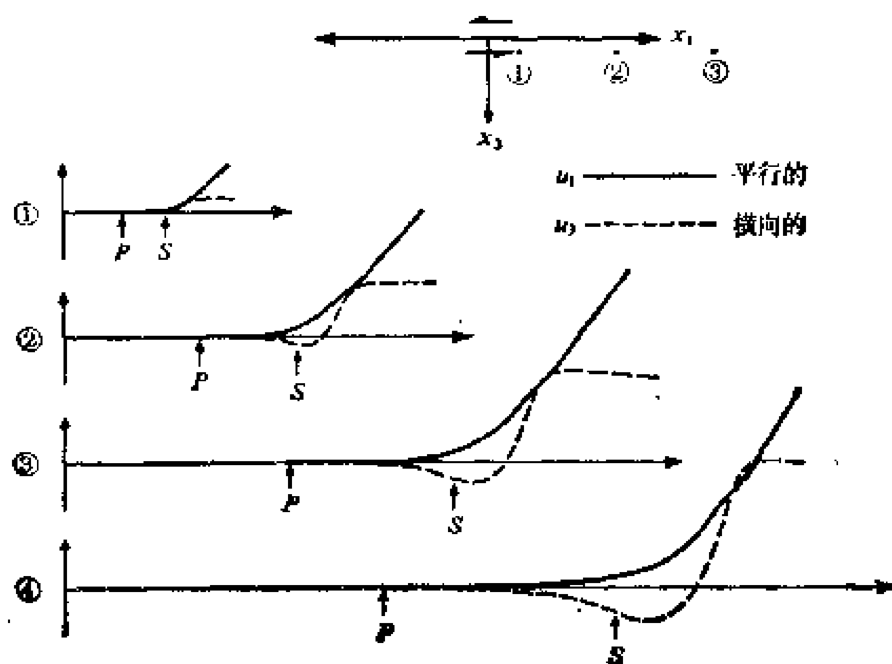


图 15.10

在如顶部所示的台站上，位移的 x_1 和 x_3 分量的合成地震图（引自 Richards, 1976 a）

能够得出对相应于来自成核点的P波和S波到达的近似波形的紧凑公式。在到时 $t=R/\alpha$，我们得到加速度有一个跳跃间断：

$$\ddot{u}^P=\frac{4\,uv\beta^2\cos\theta\sin\theta}{\alpha^3(1-D\sin^2\theta)^2}a\cos\phi\frac{H(t-R/\alpha)}{R}\hat{R},$$

式中 $D=(u^2\cos^2\phi+v^2\sin^2\phi)\alpha^2$。$(R,\ \theta,\ \phi)$是图 15.7 所示的球坐标。矢量 $\ddot{u}^P$ 指向来自成核作用点的径向，由单位矢量$\hat{R}$给出。

来自成核作用点的剪切波产生的加速度在 $t=R/\beta$ 处呈现跳跃间断：

$$[\ddot{u}_1^s,\ \ddot{u}_2^s,\ \ddot{u}_3^s]=\frac{2\,uv}{(1-D\alpha^2\sin^2\theta/\beta^2)^2}\{\cos\theta[\alpha,0,0]$$

$$\alpha\sin\theta\cos\phi[\sin 2\theta\cos\phi,\ \sin 2\theta\sin\phi,\cos 2\theta]\}\frac{H(t-R/\beta)}{R}.$$

所以，加速度的高频渐近线正比于 ω^{-1}，而相应的位移波谱有一条类似于 ω^{-3} 的高频渐近线，这与前述结果[方程(14.28)]是一致的。这些波的辐射图案显示出对 P 波由因子 $(1-D\sin^2\theta)^{-2}$，对 S 波由因子 $(1-D\alpha^2\sin^2\theta/\beta^2)^{-2}$ 修正的双力偶的对称性。

关于质点速度的奇点和裂纹尖端附近的牵引力分量，能够得到近似解的另一紧凑形式。我们把裂纹尖端在 $(x_1,\ x_2,\ 0)$ 的到时记做 t_c，于是

$$t_c=(x_1^2/u^2+x_2^2/v^2)^{1/2}.$$

在 $x_3=0$ 平面上，质点速度 $\dot{u}_1$ 由边界条件(15.28)和(15.29)给出：

$$\dot{u}_1\sim\alpha\sqrt{t_c/2}\,(t-t_c)^{-1/2}H(t-t_c). \tag{15.32}$$

当 $x_3=0$，$\dot{u}_2$ 和 τ_{33} 不存在奇点，因为这些量在整个平面上都是零。在其余位移和牵引力分量的奇点为

$$\dot{u}_3\sim\frac{2\,\beta^2 V\alpha\cos\phi}{U\alpha^2F^{1/2}B_s}\left[\frac{1}{2}\alpha^2/\beta^2+B_s^2-B_pB_s\right]$$

$$\times\sqrt{\frac{t_c}{2}}(t_c-t)^{-1/2}H(t_c-t),$$

$$\tau_{13}\sim\frac{4\,\mu\beta^2\alpha}{U^2\alpha^3FB_s}\Big[(B_p-B_s)B_sV^2\cos^2\phi+\frac{1}{4}(U^2B_s^2F$$

$$-V^2\cos^2\phi)(\alpha^2/\beta^2)\Big]\times\sqrt{t_c/2}\,(t_c-t)^{-1/2}H(t_c-t),$$

$$\tau_{23} \sim \frac{4\mu\beta^2 a\cos\phi\sin\phi}{a^3 F B_s}\left[B_s B_p - B_s^2 - \frac{1}{4}(\alpha^2/\beta^2)\right]$$
$$\times\sqrt{t_c/2}\,(t_c-t)^{-1/2}H(t_c-t), \qquad (15.33)$$

式中 μ 是刚度，且所有大写字母符号都是无量纲量，即：

$$U = u/\alpha,$$
$$V = v/\alpha,$$
$$F = U^2\sin^2\phi + V^2\cos^2\phi,$$
$$B_p^2 + 1 = B_s^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{U^4\sin^2\phi + V^4\cos^2\phi}{U^2V^2F}.$$

由于奇异性(15.32)和(15.33)描述了在裂纹尖端附近点上运动的局部性质，自然它启发我们去采用一个联系局部几何形状的坐标系。图 15.11 表明了这样一个坐标系，由法线、切线及副法线(即 x_3 轴)的方向组成，于是张量分量为

$$\tau_{3n} = \tau_{31}\cos\chi + \tau_{23}\sin\chi,$$
$$\tau_{t3} = -\tau_{31}\sin\chi + \tau_{23}\cos\chi.$$

令 v_n 是 n 方向上的破裂速度，得出

$$v_n = \frac{uv}{\alpha}[F(U^4\sin^2\phi + V^4\cos^2\phi)]^{1/2},$$

它仅和 B_p 和 B_s 有关。

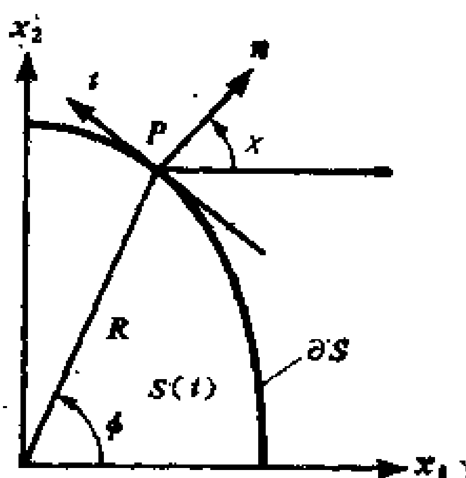


图 15.11

法向(n)和切向(t)上的局部直角坐标（引自 Richards, 1976 a）

现在，我们能够把局部运动分解成切平面分量(u_n 与 τ_{zn})和法平面分量(u_t 和 u_{tz})，因而切平面分量的奇点为

$$\dot{u}_n \sim \frac{a v_n V \cos\phi}{\alpha U F^{1/2}} \sqrt{t_c/2}\,(t-t_c)^{-1/2} H(t-t_c),$$

$$\tau_{3n} \sim -\frac{\mu \beta^2 v_n V a R(1/v_n)}{B_s U F^{1/2}} \cos\phi \sqrt{t_c/2}\,(t_c-t)^{-1/2} H(t_c-t),$$

式中 $R(1/v_n) = [(\alpha^2/\beta^2)(v_n^2/\beta^2) - 4B_sB_p + 4B_s^2]/(\alpha^2 v_n^2)$，因此，$R(1/v_n)$是 Rayleigh 函数，

$$R(p) = \left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 - 4p^2\left(p^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}\left(p^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}, \tag{15.34}$$

而法平面分量的奇点是

$$\dot{u}_t \sim \frac{a v_n U \sin\phi}{\alpha V F^{1/2}} \sqrt{t_c/2}\,(t-t_c)^{-1/2} H(t-t_c),$$

$$\tau_{t3} \sim -\frac{\mu U v_n a B_s}{V F^{1/2} \alpha^2} \sin\phi \sqrt{t_c/2}\,(t_c-t)^{-1/2} H(t_c-t).$$

与 15.1.1 节中得到的结果一致，凡破裂速度等于 Rayleigh 波速度的地方，切平面应力奇点将消失，而法平面奇点将在破裂速度为剪切速度的地方等于零(那么，$B_s=0$)。进入裂纹尖端单位破裂阵面长度的能流，像对二维裂纹那样，能用同样的方法求得。在包围裂纹尖端以及随之运动的面积上对功率积分，我们发现进入裂纹尖端的能流速率为

$$g = \lim_{\substack{\delta+\to 0\\ \delta-\to 0}} \int_{-\delta-}^{\delta+} (\tau_{3n}\Delta\dot{u}_n + \tau_{t3}\Delta\dot{u}_t)\,dn$$

$$= \frac{\pi\mu\beta^2 v_n}{4\alpha^3 U^2 V^2 B_s F} a^2 t_c [B_s^2 (v_n/\beta)^2 U^4 \sin^2\phi - R(1/v_n)\alpha^2 v_n^2 V^4 \cos^2\phi]. \tag{15.35}$$

对于小于 Rayleigh 波速度 c_R的 v_n，$R(1/v_n)$ 是负的而裂纹尖端对于切平面和法平面运动都是一个能汇。但当 $v_n > c_R$ 时，$R(1/v_n)$ 是正的，而裂纹尖端变成了切平面运动的明显能源。这对一

个纯切平面裂纹来讲是与事实不相符合的，除非法平面分量（若 $v_n<\beta$ 为正值）能够补偿供给它的能流，才有可能。在 $\phi=0$ 处，运动是纯切平面的，且裂纹尖端的极限速度将是 Rayleigh 波速度 c_R。在 $\phi=90°$ 处是纯法平面的，它的极限速度为剪切波速度 β。对于任意的 ϕ，令(15.35)内 $g=0$，将给出极限速度。合成的最后裂纹将近似为一个椭圆，其长轴与短轴分别以速度 β 和 c_R 增加

上述极限速度的讨论仅仅是建立在裂纹尖端能量速率平衡基础上的。在切平面剪切裂纹情况下，有可能使与在裂纹尖端前头传播的 P 波和 S 波相联系的应力能够克服内聚力（如果它是有限的），且裂纹速度将超过 Rayleigh 波速度，最后达到 P 波速度。在 15.2.3 节我们还令谈到这一点。

15.1.5 圆形裂纹终止情况下的远场波谱

至此，我们只研究了裂纹以常速度增长的情况。结果是使我们对剪切裂纹的滑动函数有了一定理解，还对它的弹性近场有了一定认识。然而，为了弄清楚它的远场，我们必须解决一些更复杂的问题，其中包括裂纹生长停止问题。

让我们考虑圆形裂纹，$t=0$ 时在它的中心成核，并以常速度 v 扩展，但突然停止在半径 r_c 上。直到停止的时间 $t=r_c/v$，问题是自相似的，且对于 $u=v$ 时，由 (15.29) 给定的滑动函数给出了精确解。如果在此时刻，我们冻结其运动，就得到图 14.10 中所描绘的运动学模型，方程 (14.25) 中给出了有关这个模型的远场简洁解。这种运动的冻结是不现实的，因为它违反因果关系。在停止的一瞬间，裂纹内的点并不能马上觉察出裂纹增长的终止。在图 14.12 中描绘的另一个运动学核型的滑动函数更加似是而非，但事实上，在裂纹中心处斜坡滑动函数是比较合适的，虽然在别的点上滑动函数应当以平方根上升。

远场位移波谱的高频渐近线是由靠近裂纹尖端空间内滑动函数的形式确定的，正如 14.1.6 节中所讨论的那样。对于呈阶梯

函数形的上升，预计的渐近线是 $\omega^{-3/2}$，但对平方根上升则为 ω^{-2}。像 15.1.3 节中所讨论的那样，内聚力使终止区域长度上的奇异性消除。这个常度和裂纹速度的比将给出渐近线所适用的频率上限。

由于在裂纹边缘上处理多次衍射的困难，对于一个增长着的裂纹，其停止时的弹性场是不存在解析解的。Burridge(1969) 利用这个问题的积分方程表达式用数值方法来求解一些有限切平面与法平面裂纹问题。滨野(Hamano，1974)导出了一个类似的方法，已经由 Das 和 Aki(1977 a)采用。有限差分法或有限元法也已经由 Hanson 等(1971)，Dieterich(1973)以及 Andrews(1975)用来求解一些类似的问题。这里，我们概括一下 Madariaga(1976)的工作，他利用有限差分法计算了一个增长着的圆形裂纹一旦停止时的远场地震波谱。正如在它的结果中所见到的，有限网格大小和一定的平滑过程导致了一个类似于由于内聚力而引入的人工终止区域。

我们将利用像前节（图 15.7）对椭圆裂纹所使用的符号和坐标系。仍然假定裂纹面上的应力降仅发生在 τ_{13} 分量上。同样，τ_{33} 在平面 $x_3=0$ 上为零，而 $x_3=0$ 平面上裂纹之外的 u_1 和 u_2 为零。所以，在 $x_3=0$ 上的边界条件是：

$$\left.\begin{array}{l}\tau_{13}=-p_0\\ \tau_{23}=0\end{array}\right\}\text{当 } r \text{ 小于}(vt,\ r_c)\text{最小值，}$$

$$u_1=u_2=0 \quad \text{当 } r \text{ 大于}(vt,\ r_c)\text{最小值，} \tag{15.36}$$

$$\tau_{33}=0 \qquad \text{全体 } r$$

（p_0 是应力降，在 15.2 节中将更详细地讨论）。

裂纹呈圆型，其最终半径为 r_c，这提示我们在研究这个问题时使用圆柱坐标(r，ϕ，z)是最适当的。

可把边界条件(15.36)改写为

$$\left.\begin{array}{l}\tau_{rz}=-p_0\cos\phi\\ \tau_{\phi z}=p_0\sin\phi\end{array}\right\}$$ 当 r 小于$(vt,\ r_c)$最小值，

$u_r=u_\phi=0$ 当 r 大于$(vt,\ r_c)$最小值，

以及对全体 r，$\tau_{zz}=0$。

这些边界条件有一个简单的方位角的正弦型函数关系，因此，求得 ϕ 和位移分量的关系或者是 $\sin\phi$，或者是 $\cos\phi$。它们可写成

$$u_r=u(r,\ z,\ t)\cos\phi,$$
$$u_\phi=v(r,\ z,\ t)\sin\phi,$$
$$u_z=w(r,z,t)\cos\phi.$$

相应的应力分量也可以用同样的形式写成

$$\tau_{rr}=\Sigma_{rr}(r,\ z,\ t)\cos\phi,$$
$$\tau_{\phi\phi}=\Sigma_{\phi\phi}(r,\ z,\ t)\cos\phi,$$
$$\tau_{zz}=\Sigma_{zz}(r,\ z,\ t)\cos\phi,$$
$$\tau_{rz}=\Sigma_{rz}(r,\ z,\ t)\cos\phi,$$
$$\tau_{r\phi}=\Sigma_{r\phi}(r,\ z,\ t)\sin\phi,$$
$$\tau_{z\phi}=\Sigma_{z\phi}(r,\ z,\ t)\sin\phi.$$

质点速度的三个分量 $\dot{u}$，$\dot{v}$，$\dot{w}$，及六个应力分量形成了九个未知数，从而我们有一个九个一阶微分方程的方程组：三个运动方程和六个 Hooke 定律方程。用一逗号表示对逗号后的变量求偏导数，方程可写成

$$\rho\dot{u}_{,t}=\frac{1}{r}(r\Sigma_{rr})_{,r}+\frac{1}{r}(\Sigma_{r\phi}-\Sigma_{\phi\phi})+\Sigma_{rz,z},$$

$$\rho\dot{v}_{,t}=\frac{1}{r}(r\Sigma_{r\phi})_{,r}+\frac{1}{r}(\Sigma_{r\phi}-\Sigma_{\phi\phi})+\Sigma_{z\phi,z},$$

$$\rho\dot{w}_{,t}=\frac{1}{r}(r\Sigma_{rz})_{,r}+\frac{1}{r}\Sigma_{z\phi}+\Sigma_{zz,z},$$

$$\Sigma_{rr,t}=(\lambda+2\mu)\dot{u}_{,r}+\frac{\lambda}{r}(\dot{u}+\dot{v})+\lambda\dot{w}_{,z},$$

$$\Sigma_{zz,t}=\lambda\dot{u}_{,r}+\frac{\lambda}{r}(\dot{u}+\dot{v})+(\lambda+2\mu)\dot{w}_{,z},$$

$$\Sigma_{\phi\phi,t}=\lambda\dot{u}_{,r}+(\lambda+2\mu)(\dot{u}+\dot{v})/r+\lambda\dot{w}_{,z},$$

$$\Sigma_{r\phi,t}=\mu\dot{v}_{,r}-\mu(\dot{u}+\dot{v})/r,$$

$$\Sigma_{z\phi,t}=\mu\dot{v}_{,z}-\mu\dot{w}/r,$$

$$\Sigma_{zr,t}=\mu\dot{w}_{,r}-\mu\dot{u}_{,z},$$

式中 λ,μ 是 Lamé 常数，ρ 是密度。我们将按下述 $z=0$ 上的边界条件求解这个方程组，即：

$$\Sigma_{rz}=-\Sigma_{\phi z}=-p_0 \quad \text{当 } r \text{ 小于}(vt, r_c) \text{ 最小值},$$

$$\dot{u}=\dot{v}=0 \quad \text{当 } r \text{ 大于}(vt, r_c) \text{最小值},$$

从及

$$\Sigma_{zz}=0 \qquad \text{对全体 } r.$$

原坐标中滑动分量 Δu_1 和 Δu_2，用 $z=0$ 时的 u 和 v 来表示，可写成

$$\Delta u_1=2u\cos^2\phi-2v\sin^2\phi,$$

$$\Delta u_2=(u+v)\sin 2\phi.$$

在前节研究过的自相似裂纹情况下，Δu_2 为零。在目前情况下，Δu_2 未必为零，但却发现它实际上是可忽略的，即 $u\sim -v$，因此，

$$\Delta u_1=2u=-2v. \tag{15.37}$$

有趣的是 Δu_1 与 ϕ 无关。

Madariaga(1976)利用交错网格(13.6.1 节)，使用有限差分法求解了上述问题。在这种交错网格内，我们要计算在 $k\Delta t$ 时的速度和$\left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ 时的应力，其中 Δt 是时间网格间隔。对九个应力-质点速度分量，每一个在网格点上的分配如图 15.12 所示。

图 15.13 表明了在裂纹的几个点上的滑动函数 $\Delta u(r,t)=u(r,+0,t)-u(r,-0,t)$。破裂从 $t=0$ 开始并以 0.9 β 的速度

扩展，β 为剪切波速度 滑动从 p_0r_c/μ 为单位进行测量。时间 t 和辐射距离 r' 分别用 r_c/α 与 r_c 归一化，其中 α 是 P 波速度。图中所示为在中心（$r=0$）和间隔为 $0.2\,r_c$ 的其它 4 个点上的滑动函数。每条曲线上的箭头指明了 P 波的到达，在这一点所显示的滑动是由破裂停止的瞬间裂纹终端末梢所产生的。图中还显示了在中心 $r=0$ 处所预期的静态滑动，指出了动力滑动有明显的过冲量。当滑动到达最大值，它的速度变为零，滑动就被固定住了。（如果静摩擦力足够大的话，实际上这是可能发生的。）实圈表示在每个点上滑动停止的时间，在最初上升部分的虚线表示所预期解析解的平方根函数，数值解表明因平滑而造成了缓慢的上升。这是一个前面讨论过的人为引入终止区域影响的例子。

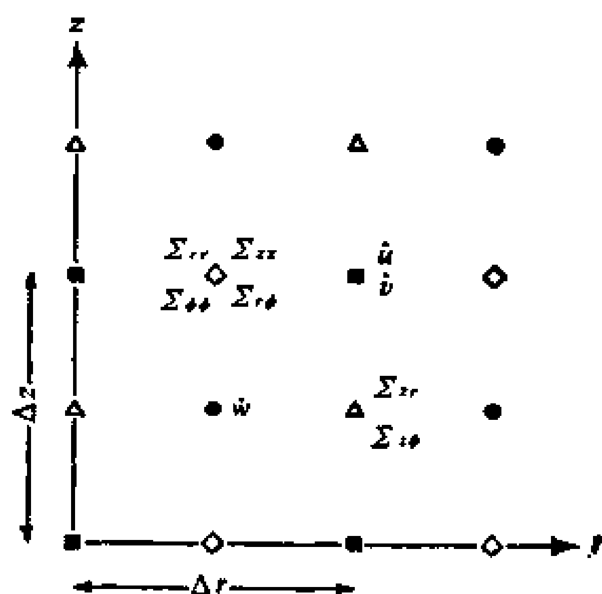


图 15.12
对九个应力-质点速度分量中每个量分配的网格点

相应于滑动函数 Δu_1 的远场位移波形由方程(14.13) 给出为

$$\Omega(\mathbf{x},t)=\int_{\Sigma}\Delta\dot{u}_1\left(\boldsymbol{\xi},t-\frac{R-(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{c}\right)d\Sigma,$$

式中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是指向接收器的单位矢量，$\boldsymbol{\xi}$ 是 $d\Sigma$ 的位置矢量，而 c 是

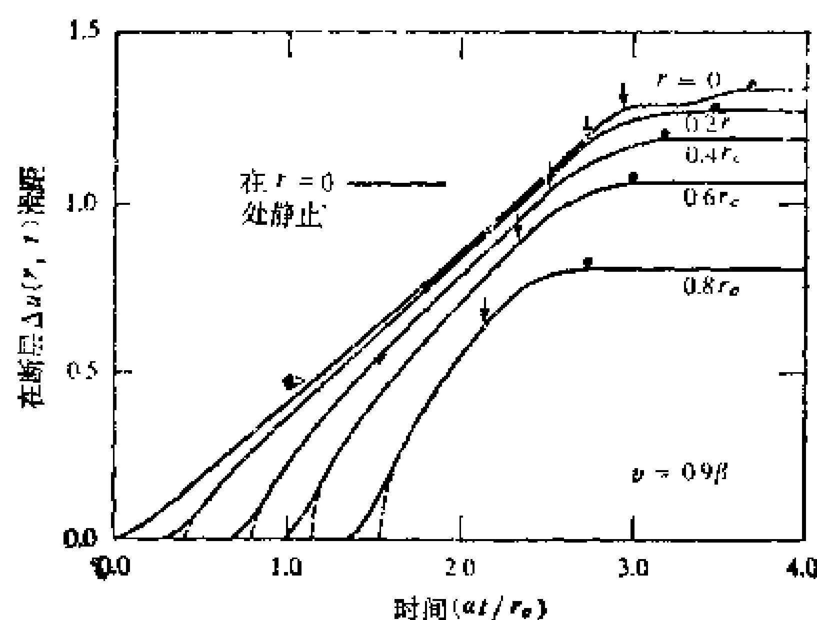


图 15.13

从圆型裂纹中心开始几个距离上的滑动函数。符号的解释见正文(引自 Madariaga, 1976)

P 波或 S 波速度。把 $\Delta\dot{u}_1(\boldsymbol{\xi},t)$ 的 Fourier 变换写为 $\Delta\dot{u}_1(\boldsymbol{\xi},\omega)$，于是远场位移谱可从方程(14.14)得到，为

$$\Omega(\mathbf{x},\omega)=e^{i\omega R/c}\int_{\Sigma}\Delta\dot{u}_1(\boldsymbol{\xi},\omega)\exp[-i\omega(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma})/c]d\Sigma.$$

在我们的情况下，因为 $d\Sigma=rdrd\phi$，且 Δu_1 与 ϕ 无关，如(15.37)所示，结果有

$$\Omega(\mathbf{x},\omega)=e^{i\omega R/c}\int_0^{r_c}rdr\Delta\dot{u}_1(r,\omega)\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[i\frac{\omega r}{c}\sin\theta\cos\right.$$

$$\left.\times(\phi-\phi_0)\right]d\phi,$$

式中我们已利用了

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma}=r\sin\theta\cos(\phi-\phi_0).$$

利用在(6.7)所给的 Bessel 函数的性质，得到

$$\Omega(\mathbf{x},\omega)=e^{i\omega R/c}2\pi\int_0^{r_c}rdr\Delta\dot{u}_1(r,\omega)J_0\left(r\frac{\omega}{c}\sin\theta\right). \tag{15.38}$$

这个方程表明远场位移谱是 $\Delta\hat{u}_1(r,\omega)$ 对 r 的 Hankel 变换。正如 14.1.3 节中对更为普遍的情况所作的讨论，仅在波数小于 ω/c 的情况下远场谱能够复原滑动函数。因为对实数 θ，$|\sin\theta| \le 1$。

$\Delta\hat{u}_1(r,t)$ 的数值解是对 t 作 Fourier 变换和对 r 作 Hankel 变换，以便用(15.38)求得远场谱 $\Omega(\mathbf{x},\omega)$。图 15.14 表明在三个接收器方向上 P 波与 S 波的组合频谱 $|\Omega(\mathbf{x},\omega)|$（$\theta=0$，相当于垂直裂纹平面），它是在破裂速度 $v=0.9\beta$ 的圆形裂纹情况下得

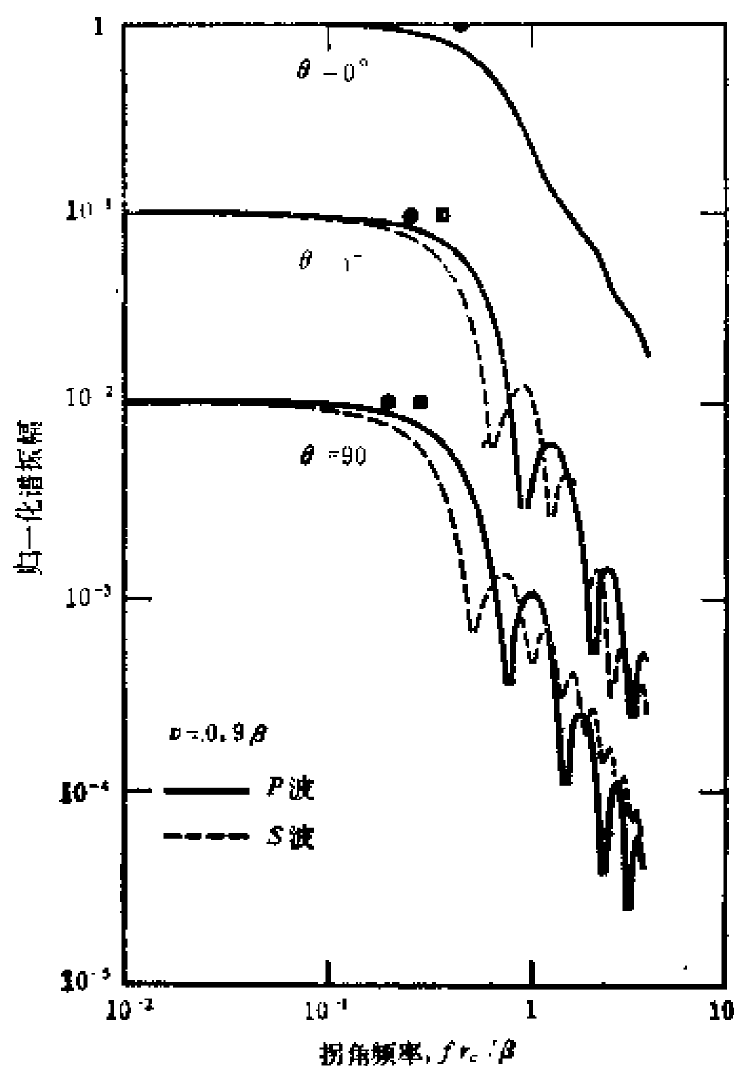


图 15.14

在破裂速度 $v=0.9\beta$ 情况下，P 波与 S 波的远场波谱 $|\Omega(\mathbf{x},\omega)|$
（引自 Madariaga，1976）

到的。波谱在低频处是平坦的，大致以 ω^{-2} 衰减。如果高频渐近线由成核相位确定，则应以 ω^{-3} 衰减。所以，必然得出的结论是：停止相位支配着高频波谱，但在圆形裂纹突然停止的情况下，渐近线的衰减幂更像是 2，而不是 3。

波谱的拐角频率用低频水平线与高频渐近线的交点确定。在图 15.14 中，用实圈和小方框分别表示 S 波和 P 波的拐角频率拐角频率。对不同方向 θ 和各种破裂速度拐角频率的结果汇总在图 15.15 中。拐角频率以 β/r_0 为单位，对应的破裂速度为 0.6β，0.7β，0.9β。虽然拐角频率随破裂速度而增加，但在这里所考虑的破裂速度范围内变化并不十分强烈。各个方向上拐角频率的平均值，在 $v=0.9\beta$ 情况下，对 P 波和 S 波分别由下式给出：

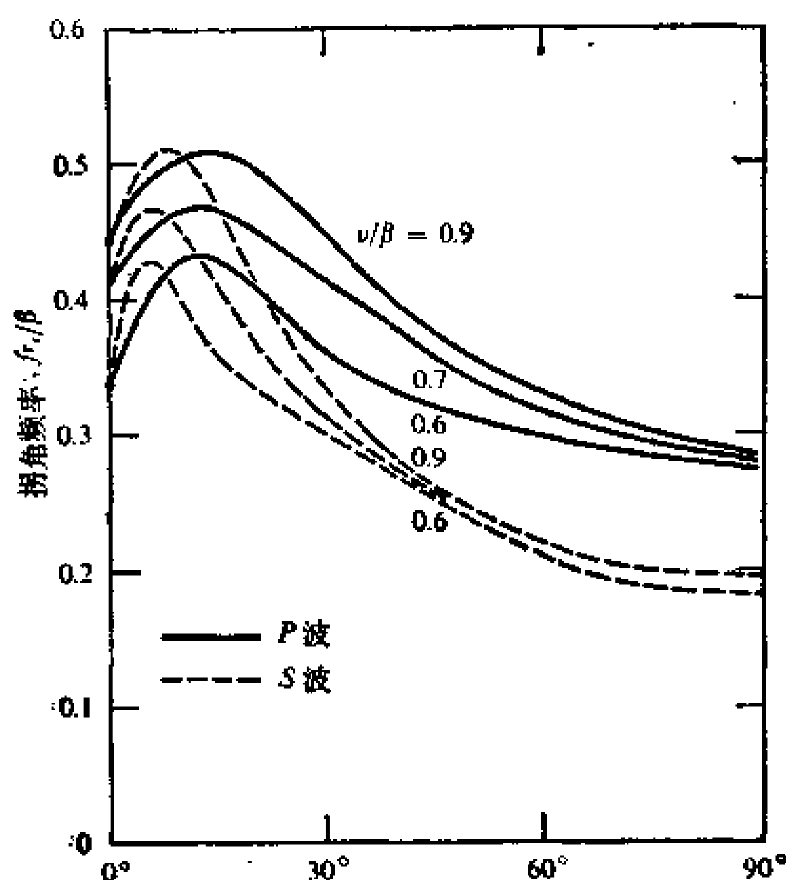


图 15.15

对于不同的破裂速度，按辐射方向绘出的 P 波和 S 波的拐角频率

$$f_c^P(\text{赫}) = 0.32\ \beta/r_c,$$
$$f_c^S(\text{赫}) = 0.21\ \beta/r_c.$$

由上述方程算出的拐角频率比 Brune(1970) 公式所得的值要低得多(大约为 1/2)， Brune 公式是从简单的运动学途径推导出来的，它已广泛地用于解释地震波谱的观测。P 波的拐角频率比 S 波的高，这正是 Molnar 等(1973)早就对于具有相同滑动函数(见图 14.12 与 14.1.6 节)的运动学模型所预期的结果。

15.2 自然破裂传播动力学

在地震学中最值得注意的问题之一就是预报地震的发生，从震中地区岩石物理性质的研究来预告合成的地震运动，以及预测这个地区存在的构造应力。为了探讨这个问题，我们必须跳出前节有关破裂传播处理的框框，上节中，成核作用、传播、破裂阵面的终止是任意指定的。在求解这个问题之前有三项重要的工作必须要做。首先，必须研究断层泥的性质，如表面能量，终止地区长度、静摩擦和动摩擦及其在空间的分布。第二，必须确定作用在断层带上的构造应力。第三，必须能够只依据断层带上的应力条件和物质性质，预测从开始到终了的整个破裂现象。本节我们将研究一个理想问题的最终状态。我们把注意力集中到应力如何分布，破裂准则如何确定一个裂纹尖端的运动，以及由此而来的滑动函数。为了方便起见，依据 Kostrov(1966) 开拓性的工作，我们将从法平面裂纹着手。

15.2.1 法平题剪切裂纹的自然传播，一般理论

利用图 14.20 所示(x,y,z)的坐标，我们将把裂纹规定为

$$x_1 < x < x_2,\ -\infty < z < \infty,\ y = 0.$$

对一个法平面情况(14.2.3 节) 只有 z 分量的位移 $w(x,y,t)$ 存在，且应力张量只有两个非零元素：$\tau_{zx} = \mu(\partial w/\partial x)$ 和 $\tau_{yz} = \mu(\partial w/\partial y)$。问题是二维的，与 z 无关。在这种情况下，运动方程

就简化为波动方程

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{15.39}$$

式中 $\beta=\sqrt{\mu/\rho}$ 是剪切波速度。

假设一开始裂纹并不存在，物体是一个具有应力初状态为 σ^0 的平衡体。取这种初始状态为基准状态，并且测量以这种状态为基准的位移。总应力取为 $\sigma=\sigma^0+\tau$，其中 τ(递增的应力)是用 Hooke 定律从 u 推导出来的。初始条件在 $t=0$ 时，w 与 $\partial w/\partial t$ 都是零。当裂纹形成时，裂纹上的牵引力下降为动摩擦应力。在裂文面($y=0$)上牵引力只有 σ_{yz} 分量是变化的，比如说从 σ_{yz}^0 变到 σ_{yz}^0。我们将使应力降 $\sigma_{yz}^0(x,0)-\sigma_{yz}^d(x,0,t)$ 等于 $p(x,t)$。那么对于以上选择的基准状态，裂纹上适当的牵引力边界条件为

$$\text{对于 } x_1<x<x_2,\ y=0,\ \tau_{yz}=-p(x,t). \tag{15.40}$$

为了找出 $y=0$ 上的 (x_1, x_2) 以外的边界条件，把方程(15.39)的解写为以下形式：

$$w=\iint w^+(\omega,k)\exp(-i\omega t+ikx-\nu y)d\omega dk \quad y>0$$

$$=\iint w^-(\omega,k)\exp(-i\omega t+ikx+\nu y)d\omega dk \quad y<0,$$

式中 $\nu=\sqrt{k^2-\omega^2/\beta^2}$，根据辐射条件，$\mathrm{Re}\gamma\geqslant 0$。因为穿过 $y=0$ 的牵引力 τ_{yz} 是连续的，有

$$w^+(\omega,k)=-w^-(\omega,k),$$

因此，$w(x,y,t)$ 必定是 y 的奇函数。如果它在 $y=0$ 处是连续的，那么它一定是零。因为 w 在 $y=0$ 上的裂纹之外是连续的，所以有

$$w(x,y,t)=0 \quad x<x_1, x_2<x, y=0. \tag{15.41}$$

方程(15.40)与(15.41)一起给出了在 $y=0$ 上的混合边界条件。由于对称性，只要在 $y<0$ 的半无限空间内得出一个解就足够了。

为了解出这个边值问题，我们从表示定理(2.43)出发，并利用满足在 $y=0$ 处应力自由条件的 Green 函数。这样的 Green 函数是通过首先求出在空间内位于$(x,0,t)$ 上的一个线体力脉冲的 Green 函数 G 后得出的，G 满足方程

$$\rho\frac{\partial^2 G}{\partial t_0^2}-\mu\frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2}-\mu\frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2}=\delta(x_0-x)\delta(y_0)\delta(t_0-t).$$

除了记号差别外，这就是方程(6.41)，它由(6.42)来求解，为了目前的目的，我们获得如下的解：

$$G(x_0,t_0;\ x,t)=\frac{H\{(t_0-t)-[(x_0-x)^2+y_0^2]^{1/2}/\beta\}}{2\pi\mu R},$$

式中 $R^2=(t_0-t)^2-\{(x_0-x)^2+y_0^2\}/\beta^2$，$H\{\ \}$是单位阶梯函数。因为上述 Green 函数刚好满足 $y_0=0$ 处的应力自由条件，在 $y_0=0$ 的表面上的 Green 函数只是$2\,G(x_0,t_0;\ x,t)$，考虑到反射的效果，已使振幅加倍。

若已知 $y=0$ 上每一处的牵引力 τ_{yz}，

$$\tau_{yz}(x,0,t)=\tau(x,t).$$

通过把 $2\,G(x_0,t_0;\ x,t)$代入表示定理(2.43)，我们能够把解写为：

$$w(x_0,y_0,t_0)=\frac{1}{\pi\mu}\iint_S\frac{\tau(x,t)}{R}dx\,dt\qquad y_0<0,\tag{15.42}$$

式中 S 是在 xt 平面上锥形

$$\beta^2(t_0-t)^2-(x_0-x)^2-y_0^2\geqslant 0\quad 0\leqslant t\leqslant t_0$$

区域内部分。对于 $y_0=0^-$，得到

$$w(x_0,0^-,t_0)=\frac{1}{\pi\mu}\iint_{S_0}\frac{\tau(x,t)\,dx\,dt}{\sqrt{(t_0-t)^2-(x_0-x)^2/\beta^2}},\tag{15.43}$$

其中 S_0 是三角形

$$\beta^2(t_0-t)^2-(x_0-x)^2\geq 0 \quad 0\leq t\leq t_0,$$

如图 15.16 影区所示。

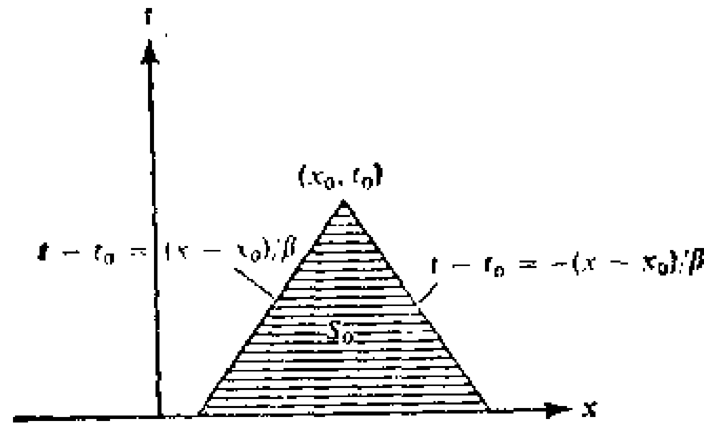


图 15.16

S_0内的所有点都能影响(x_0, t_0)的位移

因为我们不知道在S_0整个面积上的$\tau(x,t)$，方程(15.43) 不能直接给出解。然而，边界条件 (15.41) 给出了 $x_0<x_1$ 与$x_0>x_2$的下列方程：

$$\iint\limits_{S_0}\frac{\tau(x,t)dxdt}{\sqrt{(t_0-t)^2-(x_0-x)^2/\beta^2}}=0.$$

$\tau(x,t)$在上述积分区域S_0的一些部分内是已知的，如图 15.17 所示。其中裂纹尖端的轨迹用$x_1(t)$和$x_2(t)$表示。子区域S_1位于裂纹之内，$\tau(x,t)$ 在这里已从 (15.40) 中知道。另一方面，在子区域 $S_0-S_1-S_2$内，对于$x>x_2(0)+\beta t$,$\tau(x,t)$ 为零，这是因为来自裂纹的任何干扰还未到达这个子区域。最后，在子区域S_2内的$\tau(x,t)$值是未知的。这样，只要S_0不与$x_1(t)$相交(当来自左边裂纹尖端的扰动还未到达观测点时)，对于 $x_0<x_1$与 $x_0<x_2$有：

$$\iint\limits_{S_2}\frac{\tau(x,t)dxdt}{\sqrt{(t_0-t)^2-(x_0-x)^2/\beta^2}}=-\iint\limits_{S_1}\frac{p(x,t)dxdt}{\sqrt{(t_0-t)^2-(x_0-x)^2/\beta^2}}.\tag{15.44}$$

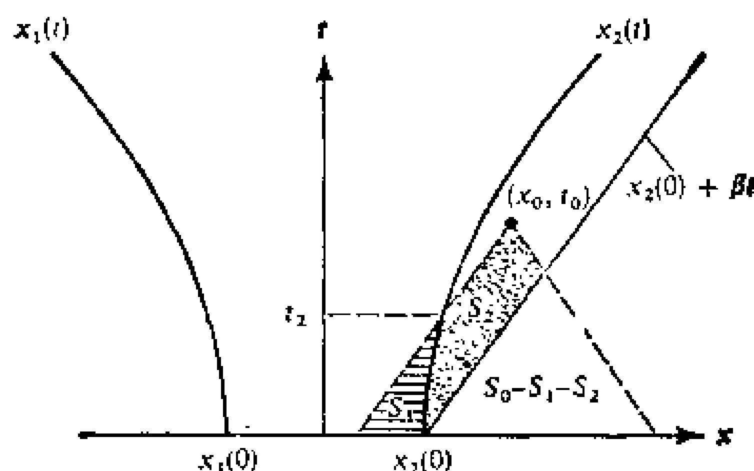


图 15.17

在S_1内$\tau(x,t)$已知，而在S_2内，$\tau(x,t)$未知，则在$S_0-S_1-S_2$内，$\tau(x,t)$为零

为了求解在 S_2内 $\tau(x,t)$ 的积分方程，首先做出下述变量替换：

$$
\begin{aligned}
\xi &= (\beta t - x)/\sqrt{2}, \\
\eta &= (\beta t + x)/\sqrt{2}.
\end{aligned}
\tag{15.45}
$$

然后 (15.44) 可以改写为

$$
\int_{x_2(0)/\sqrt{2}}^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0-\xi}} \int_{\eta_2(\xi)}^{\eta_0} \frac{\tau(\xi,\eta)d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}}
$$

$$
= \int_{-x_1(0)/\sqrt{2}}^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0-\xi}} \int_{-\xi}^{\eta_2(\xi)} \frac{p(\xi,\eta)d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}}, \tag{15.46}
$$

其中 $\eta_2(\xi)$是$\eta_2-\xi=\sqrt{2}\ x_2\left(\dfrac{\eta_2+\xi}{\sqrt{2}\ \beta}\right)$的解。它限定了$\xi$和$\eta$内右侧裂纹尖端的位置。$\xi$和$\eta$的积分限很容易从图 15.18 中得出。显然，如果

$$
\int_{\eta_2(\xi)}^{\eta_0} \frac{\tau(\xi,\eta)d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}} = \int_{-\xi}^{\eta_2(\xi)} p(\xi,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}}, \tag{15.47}
$$

那么（15.46）将被满足。以上方程是关于$\tau(\xi,\eta)$的Abel积分方程形式。补充12.1内描述过它的解，在我们的情况下有

$$\tau(\xi_0,\eta_0)=-\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\eta_0}\int_{\eta_2(\xi_0)}^{\eta_0}\frac{d\eta_1}{\sqrt{\eta_0-\eta_1}}\int_{-\xi_0}^{\eta_2(\xi_0)}p(\xi_0,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{\eta_1-\eta}}.$$

由于

$$\int_{\eta_2}^{\eta_0}\frac{d\eta_1}{\sqrt{\eta_0-\eta_1}\sqrt{\eta_1-\eta}}=\arcsin\left(1+\frac{2(\eta_1-\eta_0)}{\eta_0-\eta}\right)\Bigg|_{\eta_1=\eta_2}^{\eta_1=\eta_0},$$

上述方程简化为

$$\tau(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{\pi\sqrt{\eta_0-\eta_2(\xi_0)}}\int_{-\xi_0}^{\eta_2(\xi_0)}p(\xi_0,\eta)\frac{\sqrt{\eta_2(\xi_0)-\eta}}{\eta_0-\eta}d\eta. \tag{15.48}$$

积分路径沿$\xi=\xi_0$，相当于xt坐标中路径$t-t_0=(x-x_0)/\beta$。变换回xt坐标系，并参考图15.17与15.18，对于$x_0>x_2(t_0)$，得到

$$\tau(x_0,t_0)=\frac{1}{\pi\sqrt{x_0-x_2(t_2)}}\int_{x_0-\beta t_0}^{x_2(t_2)}p[x,t_0+(x-x_0)/\beta]\times\frac{\sqrt{x_2(t_2)-x}}{x_0-x}dx, \tag{15.49}$$

式中t_2是

$$\beta t_0-x_0=\beta t_2-x_2(t_2)$$

的解。换言之，t_2是裂纹尖端轨迹$x_2(t)$与积分路径相交的时刻。上述表达式在时间间隔$0<t_0<[x_0-x_1(0)]/\beta$内成立。在时间间隔$0<t_0<[x_2(0)-x_0]/\beta$和区域$x_0<x_1$内可以得出相同结果。为了确定下一时刻的$\tau(x_0,t_0)$，出现附加的具有未知$\tau(x,t)$的S_0子区域，它和波在裂纹边界上的重复衍射相对应。

方程(15.49)表明，当裂纹尖端到达接收点时，应力$\tau(x_0,t_0)$变成无穷大，因此$x_0=x_2(t_0)$。在到前一个给定时刻，裂纹尖端

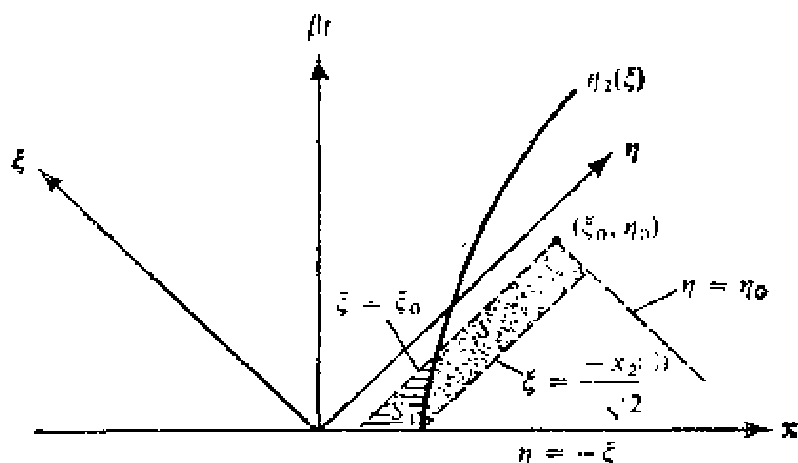


图 15.18
积分变量从(x,t)变换到(ξ,η)

和接收器之间的距离是 $x_0-x_2(t_0)$。利用 15.1.1 节中所定义的应力强度因子K，在裂纹尖端的前头和附近，$\tau(x_0,t_0)$可写成

$$\tau(x_0,t_0)\sim\frac{K}{\sqrt{2\pi[x_0-x_2(t_0)]}}. \qquad (15.50)$$

另一方面，从图 15.19 可以看出，

$$x_0-x_2(t_2)\sim\beta(t_0-t_2),$$

$$x_2(t_0)-x_2(t_2)\sim\dot{x}_2(t_0)(t_0-t_2),$$

因此

$$\frac{x_0-x_2(t_0)}{x_0-x_2(t_2)}\sim 1-\dot{x}_2(t_0)/\beta. \qquad (15.51)$$

比较 (15.49)，(15.50) 与 (15.51)，在裂纹尖端附近得到

$$K\sim\frac{\sqrt{1-\dot{x}_2(t_0)/\beta}}{\sqrt{\pi/2}}\int_{x_2(t_0)-\beta t_0}^{x_2(t_0)}p\{x,t_0-[x_2(t_0)-x]/\beta\}$$

$$\times\frac{dx}{\sqrt{x_2(t_0)-x}}, \qquad (15.52)$$

式中 $x_0\sim x_2(t_2)\sim x_2(t_0)$。积分路径如图 15.19 所示，是连接$[t_0,x_2(t_0)]$与$[0,x_2(t_0)-\beta t_0]$的一条直线。

在 15.1.2 节中，我们证明了以亚音速 v 移动的法平面裂纹尖端以速率

$$g=\frac{vK^2}{2\mu}(1-v^2/\beta^2)^{-1/2} \qquad (即15.15)$$

吸收能量。

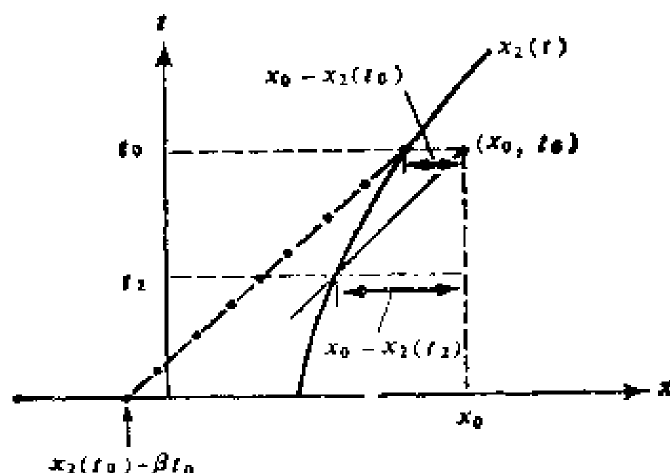


图 15.19

(15.12)的积分路径

把需要建立一个新的单位面积的表面能量表示为 G，有

$$G=\frac{g}{2v}=\frac{K^2}{4\mu}(1-v^2/\beta^2)^{-1/2}.$$

补充15.3

和内聚力有关的应力强度因子

这里我们将证明，在裂纹尖端以常速度运动的情况下，可用方程(15.52)导出(15.19)。

令裂纹尖端以常速度 v 运动在 x 方向上的坐标为x'。则 $x'=x-x_2(t)$，其中$x_2(t)=$常数$+vt$。

面前已定义p为应力降$\sigma^0_{yz}-\sigma^d_{yz}$。但如果考虑像(15.18)中那样的一个内聚力，断层面上的应力变成$\sigma^d_{yz}+\sigma_c$，因此，应力降是$\sigma^0_{yz}-\sigma^d_{yz}-\sigma_c$，即增加了$-\sigma_c$。所以内聚力的效果是增加了一个应力集中，

它具有一个以$-\sigma_c$代替(15.52)中p导出的应力强度因子。积分所限定的区域为$-d\leqslant x'\leqslant 0$，其内$\sigma_c\neq 0$，而所有这个范围已包括在(15.52)的积分限内。

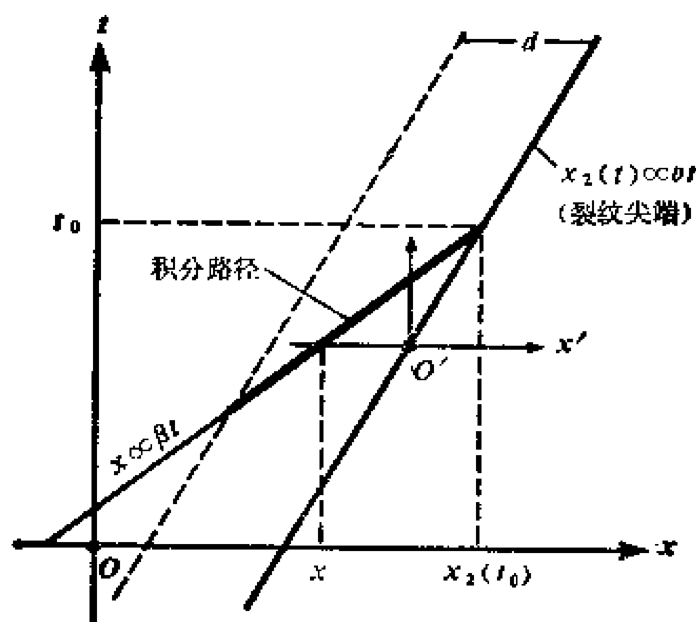
从下图中容易看出

$$x_2(t_0)-x=\frac{\beta}{\beta-v}(-x')\text{ 和 }dx=\frac{\beta}{\beta-v}dx'.$$

所以，(15.52)变成

$$K=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-d}^{0}\sigma_c(x')\frac{dx'}{\sqrt{-x'}},$$

这就是早先在(15.19)中所利用的结果。注意在这种情况下，K与v无关。



把这个方程与（15.52）联立（去掉t_0的下角标0），得到

$$K=2(\mu G)^{1/2}(1-v^2/\beta^2)^{1/4}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-v/\beta)^{1/2}\int_{x_2-\beta t}^{x_2}p[x,t-(x_2-x)/\beta]\frac{dx}{\sqrt{x_2-x}}$$

或

$$\int_{x_2-\beta t}^{x_2} p[x,t-(x_2-x)/\beta]\frac{dx}{\sqrt{x_2-x}}=(2\mu\pi G)^{1/2}\left(\frac{1+v/\beta}{1-v/\beta}\right)^{1/4},$$

(15.53)

其中$v=\dot{x}_2(t)$。这首先由 Kostrov(1966) 推导出的方程，对给定$p(x,t)$和G的情况下，给出了裂纹尖端的速度。上述方程只有当

$$\int_{x_2-\beta t}^{x_2} p[x,t-(x_2-x)/\beta]\frac{dx}{\sqrt{x_2-x}}\geqslant(2\mu\pi G)^{1/2}$$

时才成立。否则裂纹尖端不移动。

一旦确定了裂纹尖端的轨迹$x_2(t)$，就能用方程(15.48)来计算$\tau(x_0,t_0)$ 然后，我们就利用（15.42）确定任意点上的位移。事实上，裂纹内的位移只能根据裂纹内的应力降$p(x,t)$来确定。用方程(15.45)把(x,t)变换成(ξ,η)，(15.43)可改写为

$$w(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{\pi\mu}\iint\frac{\tau(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{2}\sqrt{\xi_0-\xi}\sqrt{\eta_0-\eta}}\quad 在y=0^-上.$$

如在图 15.20 内所表明的那样，让我们把积分区域划为四个部分。在S_1和S_3内，$-\tau(\xi,\eta)$表示应力降$p(\xi,\eta)$。在S_2内，$\tau(\xi,\eta)$是未知的，但可由方程（15.48)和$p(\xi,\eta)$来确定。在S_0的剩余部分，$\tau(\xi,\eta)$变为零。

从方程（15.47)，对于在裂纹外紧靠裂纹尖端轨迹的一个点(ξ,η)，我们有

$$\int_{\eta_2(\xi)}^{\eta_1}\frac{\tau(\xi_1,\eta)d\eta}{\sqrt{\eta_1-\eta}}-\int_{-t_1}^{\eta_2(\xi)}\frac{p(\xi_1,\eta_1)d\eta}{\sqrt{\eta_1-\eta}}=0.$$

对于区域S_1和S_2，因为$\eta_0=\eta_1$我们对η积分正好是上述形式。因此，来自S_1和S_2的贡献为零。仅有的贡献来自S_3，所以$y=0^-$上的位移是

$$w(\xi_0,\eta_0)=\frac{-1}{\sqrt{2}\pi\mu}\int_{\xi_2(\eta_0)}^{\xi_0}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0-\xi}}\int_{-t}^{\eta_0}\frac{p(\xi,\eta)d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}},$$

(15.54)

式中$\xi=\xi_2(\eta)$是在(ξ,η)平面的裂纹尖端的轨迹。以上方程给出以应力降$p(\xi,\eta)$和裂纹尖端位置$\xi_2(\eta)$为函数的断层滑动$(2w)$。井田(Ida, 1973)用上述方程来研究自然破裂的传播问题，这将在后面描述。

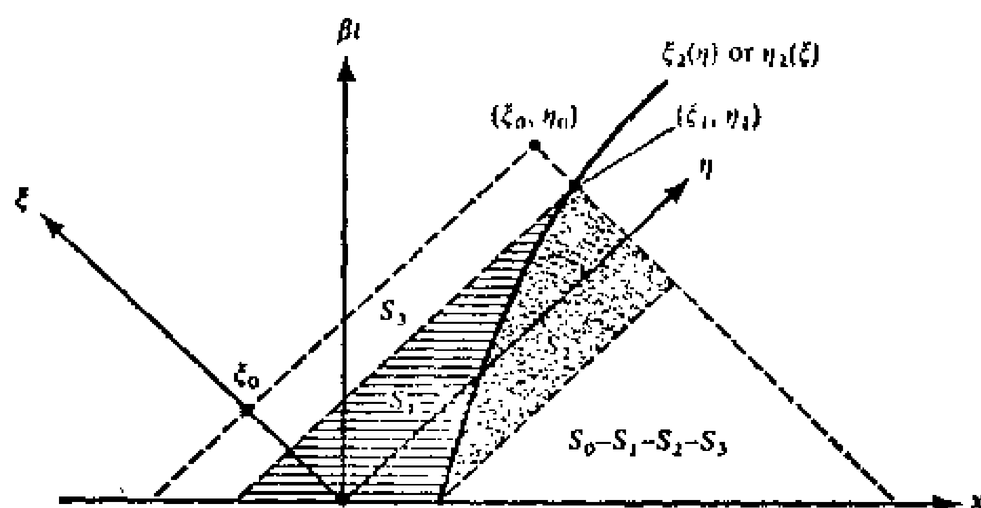


图 15.20

15.2.2 法平面裂纹自然传播的例子

让我们来看看在前节中导出的裂纹尖端运动方程(15.53)如何运用到一些简单例子之中。

半无限裂纹

考虑一个均匀剪切应力σ^0_{yz}下的无界物体。设在$y=0$，$x<0$的半平面上，$t=0$的瞬间出现一个裂纹。令动摩擦为零，对于$y=0$，$x<0$，同时产生一个应力降σ^0_{yz}。利用裂纹尖端运动方程，我们可求出$t>0$时裂纹尖端的位置$x_2(t)$。对于$x<x_2(t)$，

$$p(x,\ t)=\sigma^0_{yz},$$

从方程(15.53)我们有，

$$\int_{x_2-\beta t}^{x_2}\frac{\sigma^0_{yz}dx}{\sqrt{x_2-x}}=(2\,\mu\pi G)^{1/2}\left(\frac{1+\dot{x}_2/\beta}{1-\dot{x}_2/\beta}\right)^{1/4}. \quad (15.55)$$

上述方程的左边等于$2\sigma^0_{yz}\sqrt{\beta t}$。当$t$小于由

$$2\sigma^0_{yz}\sqrt{\beta t_c}=(2\mu\pi G)^{1/2} \tag{15.56}$$

所确定的 t_c 时，上述方程不能成立。换言之，裂纹尖端在 t_c 时才能传播。在这个时间之后，裂纹尖端运动则由方程 (15.55) 所控制，即

$$\sqrt{\frac{t}{t_c}}=\left(\frac{1+\dot{x}_2/\beta}{1-\dot{x}_2/\beta}\right)^{1/4}.$$

解 $\dot{x}_2$，并对 t 由 t_c 至 t 进行积分，得

$$x_2(t)=\beta t-\beta t_c\left[1+2\arctan\left(\frac{t}{t_c}\right)-\frac{\pi}{2}\right].$$

裂纹尖端在 $t=t_0$，以零初速度开始运动，并迅速到达一个截止速度 β。图 15.21 表示了不同 t_c 的裂纹尖端运动。实线相当 Irwin 准则，其中临界应力强度因子假定是一个与破裂速度无关

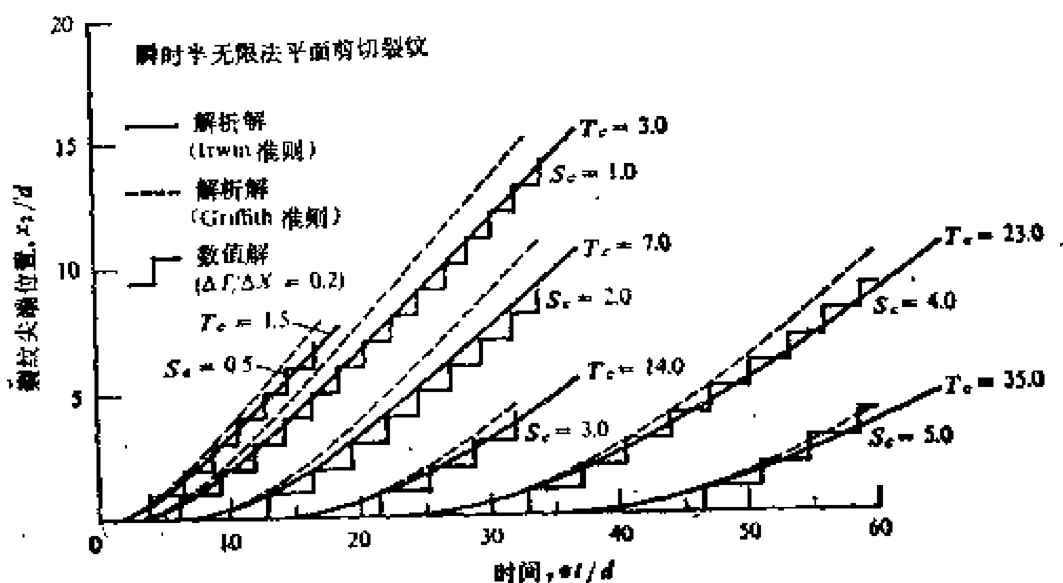


图 15.21

对不同 T_c 值，裂纹尖端位置 x_2 为时间的函数，其中 $T_c=\alpha t_c/d$，α 是纵波速度，t_c 是在(15.56)中定义的破裂开始时间。而 d 是在 15.2.3 节中描述的数值解所采用的网格长度。S 是数值解中采用的破裂准则的参数，且 $1+S=S_c/(\sigma^0_{xy}-\sigma^d_{xy})$，其中 S_c 是在(15.75)中定义的临界应力差。虚线相当于恒定表面能准则，而实线相当于恒定临界应力强度因子准则(引自 Das and Aki, 1977 a)

的物质常数（见问题 15.2）。由数值方法得出的阶梯状曲线将在后面讨论。

半无限裂纹的停止

以上由 Kostrov (1966) 给出的经典例子，被 Husseini 等 (1975)推广到包括裂纹尖端运动停止的问题。沿断层平面设置一个高表面能的阻挡层或把预应力区域限制在有限大小范围内，就能够使裂纹尖端运动停止。在另一种情况下，在最初的半无限裂纹上施加一个应力降 $p(x, t)$：

$$p(x, t)=0 \quad 当 x<-a，t>0，$$
$$=p_0 \quad 当 -a<x<x_2(t)，t>0，$$

式中 p_0 为常数。它的意图在于模拟一个在裂纹边缘上不引入复杂的多次衍射的有限裂纹。对于一个给定的 p_0 和 $x=0$ 处的表面能 G_0，a 必定大于 βt_c，以便使破裂能够开始。从(15.56)，这一条件是

$$a>\frac{\mu\pi G_0}{2p_0^2}.$$

让 G 随 x 增加，能使破裂停止。例如，考虑线性增加的表面能

$$G(x)=(1+mx)G_0.$$

从方程(15.53)，我们得到

$$\dot{x}_2(t)=\beta\frac{t^2-t_c^2(1+mx_2)^2}{t^2+t_c^2(1+mx_2)^2} \qquad x_2-\beta t>-a$$
$$=\beta\frac{(x_2+a)^2/\beta^2-t_c^2(1+mx_2)^2}{(x_2+a)^2/\beta^2+t_c^2(1+mx_2)^2} \quad x_2-\beta t<-a. \quad (15.57)$$

裂纹尖端的停止位置，x_s，可以从(15.57)中的第二个方程中，令 $\dot{x}_2(t)=0$ 求得。因而

$$x_s=\frac{a-\beta t_c}{m\beta t_c-1}.$$

因为对真实的裂纹停止，$x_s>0$，所以对于裂纹尖端停止来讲，有效能量的增加率 m 必定大于 $(\beta t_c)^{-1}$。裂纹尖端的运动可通过

解微分方程(15.57)得到。

另一个简单的阻挡层是阶梯状增加的G：

$$G=G_0 \quad 0\leqslant x<b,$$

$$G=G_0+\Delta G \quad b<x,$$

在这种情况下，若$x_2(t)>b$，则有

$$\dot{x}_2=\frac{(x_2+a)^2/\beta^2-t_c^2[1+(\Delta G/G_0)]^2}{(x_2+a)^2/\beta^2+t_c^2[1+(\Delta G/G_0)]^2}, \tag{15.58}$$

令$\dot{x}_2=0$，我们可解出尖端停止位置为

$$x_s=\beta t_c[1+(\Delta G/G_0)]-a.$$

既然$x_s\geqslant b$，要产生停止，必须满足下列不等式：

$$\beta t_c\left(1+\frac{\Delta G}{G_0}\right)=\frac{\mu\pi(G_0+\Delta G)}{2\,p_0^2}\geqslant(a+b). \tag{15.59}$$

若把这个不等式代人(15.58)，可发现$\dot{x}_2$是零或是负值。因为实际上$\dot{x}_2$不可能为负值，所以$\dot{x}_2$必定为零，且(15.59)中的等式成立。等式意味着$x_s=b$，或者意味着若条件(15.59)成立，裂纹尖端立即停止在b处。如果不是这样，裂纹尖端将超过b无限制地传播。例如，若$G_0=10^4$尔格/厘米^2，$(a+b)=1$公里，$p_0=10$巴，$\mu=3\times10^{11}$达因/公里^2，那么要使破裂停止的话，ΔG一定为10^7尔格/厘米^{2}左右或者更大。此外，长度越大或应力降越大，ΔG越大，就一定能使破裂停止。

停止破裂的另一个替换办法是限制预应力区的大小。例如，对如下情况，当$t>0$，

$$\begin{aligned} p(x,t)&=0 && x<-a\\ &=p_0 && -a<x<x_2(t)<b\\ &=0 && b<x. \end{aligned}$$

运动方程(15.53)给出裂纹尖端的速度为

$$\dot{x}_2=\frac{[f(x_2,t)]^4-\beta^2t_c^2}{[f(x_2,t)]^4+\beta^2t_c^2},$$

其中

$$
\begin{aligned}
f(x_2,t) &= (\beta t)^{1/2} && x_2<b,\ x_2-\beta t>-a \\
&= (x_2+a)^{1/2} && x_2-\beta t<-a \\
&= (\beta t)^{1/2}-(x_2-b)^{1/2} && x_2>b,\ x_2-\beta t>-a \\
&= (x_2+a)^{1/2}-(x_2-b)^{1/2} && x_2-\beta t<-a.
\end{aligned}
$$

从最后的方程知道，停止的位置可以用令 $\dot{x}=0$ 得到。结果是

$$
x_s=\frac{(a+b)^2}{4\beta t_c}+\frac{b-a}{2}+\frac{\beta t_c}{4}.
$$

例如，若 $b\sim a\sim\beta t_c$，$x_s\sim b\left(1+\frac{1}{4}\right)$，但若 $b\gg a\sim\beta t_c$，$x_s\sim b(1+b/4a)$。因此，如果预应力区的长度 b 比 $\beta t_c=\mu\pi G_0/2\tau_0^2$ 大得多，那么，将存在一个可观的过冲，使裂纹一直延伸到初始未受应力的区域。对于在实验室测量的表面能 G（$\sim10^4$ 尔格/厘米^2）及 $\tau_0\sim10$ 巴，βt_c 仅为 50 厘米。如果把这种值用于天然地震上，一定会有过冲。但是正如在 15.1.3 节中所提到的，对于地震来讲，G 的实际值可以是 10^8 尔格/厘米^2 左右，这相当于 βt_c 为 5 公里。由于预料 G 将因微裂纹形成带和塑性应变带的增加而随震级增加，过冲也许并不起重要作用。

断层上滑动-速率相关边界条件

如果在应力和滑动或者在应力与滑动速率之间有任何本构关系，我们就能在破裂传播方程中把它考虑进去。例如，井田(Ida, 1973) 假定在断层上应力 σ_{yz} 与滑动率 $\Delta\dot{w}$ 间的关系为下述方程（见图 15.22）：

$$
\begin{aligned}
\sigma_{yz} &= \gamma\Delta\dot{w} && \text{当 } \Delta\dot{w}\leqslant v_c \\
&= \sigma_{yz}^d && \text{当 } \Delta\dot{w}>v_c,
\end{aligned}
\tag{15.60}
$$

其中 σ_{yz} 是作用在断层面上的总应力，即初始应力 σ_{yz}^0 与由于裂纹形成所造成的应力增量 τ_{yz} 之和。在 $y=0^-$ 上[它是我们已研究过位移的断层的一侧，例如见(15.42)]滑动率 $\Delta\dot{w}$ 等于 $-2\dot{w}$。虽然上述本构关系并非是非常逼真的，但它却显示了由延性到脆性转变的行为。这也许可以大致地模拟地震断层的特性，在这个断

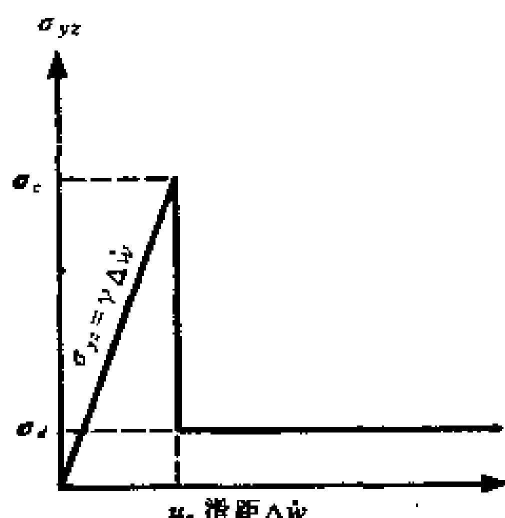


图 15·22

井田假定的断层面上应力与滑动率间的本构关系(引自 Ida, 1973)

层上蠕变和动力破坏总是同时发生的。假设有一个无应力断层，当构造应力增加时，断层可能产生缓慢蠕变，但滑动率也许以正比于应力而增加。当滑动率增加到一定的屈服限 v_c 时，应力可以突然降低到动摩擦水平 σ_{yz}^d，于是发生地震。

为了把上述本构关系纳入破裂传播方程，我们利用

$$w(\xi_0,\eta_0)=\frac{-1}{\sqrt{2}\pi\mu}\int_{\xi_2(\eta_0)}^{\xi_0}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0-\xi}}\int_{-\xi}^{\eta_0}\frac{p(\xi,\eta)d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}},\quad (\text{即 } 15.54)$$

根据这个方程，我们能从裂纹内应力降 p，求出裂纹内部滑动 $\Delta w=2w$。

象前面那样，假定一个半无限裂纹在 $t=0$，$x<0$ 时突然出现。因为 $t<-x/\beta$ 或 $\eta<0$，我们预计来自裂纹尖端不会有什么干扰，在均匀初应力 σ_{yz}^0 之下，滑动将是均匀的。当 $\eta<0$，滑动能依据均匀应力降 p_0 用方程(15.54)来表达，p 由本构关系(15.60)确定。当 $\eta<0$ 时，积分区域以 $t=0$ 和 $\xi_2(\eta)=-\eta$ 为界。则方程(15.54)给出一个容易积分的结果：

$$w(\xi_0,\eta_0)=\frac{-1}{\sqrt{2}\pi\mu}\int_{-\eta_0}^{\xi_0}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0-\xi}}\int_{-\xi}^{\eta_0}\frac{p_0d\eta}{\sqrt{\eta_0-\eta}}.$$

$$= -\frac{\beta p_0 t}{\mu} \quad 在\ y = 0^-,$$

式中利用了(15.45)。由方程(15.60)，有

$$\sigma_{yz} = \sigma_{yz}^0 - p_0 = \gamma \Delta \dot{w} = -2\gamma \dot{w} = 2\gamma\beta p_0/\mu \quad 当\ \beta t < -x. \tag{15.61}$$

依据初应力和材料常数，由这个方程可确定 $\beta t < -x$ 时所发生的应力降 p_0，即

$$p_0 = \frac{\sigma_{yz}^0}{1 - 2\gamma\beta/\mu}.$$

对于 $\beta t > -x$ 或 $\eta > 0$，基本上能用与上面同时求解(15.54)及(15.60)的方法来确定应力降 $p(\xi,\ \eta)$。然而，我们必须利用某些数值方法求解积分方程(15.54)。由于积分范围限制在 S_3，如图 15.20 所示，离散的积分方程能够一步一步的解出，当方程中每一个离散点$(n,\ m)$上的未知数是 $p(\xi_n,\ \eta_m)$ 与 $\dot{w}(\xi_n,\ \eta_m)$。因为 $p(\xi_n,\ \eta_m)$与 $\Delta\dot{w} = -2\dot{w}(\xi_n,\ \eta_m)$也必须由方程 (15.60) 联系起来，从这两个方程可以同时确定在这个点上的 p 和 $\Delta\dot{w}$。

在解(15.54)时，裂纹尖端位置 $\xi_2(\eta)$必须为已知。考虑到在裂纹尖端轨迹上，$\xi = [\beta t - x_2(t)]/\sqrt{2}$ 和 $\eta = [\beta t + x_2(t)]/\sqrt{2}$，有

$$\frac{d\xi_2}{d\eta} = \frac{d\xi_2/dt}{d\eta/dt} = \frac{\beta - \dot{x}_2(t)}{\beta + \dot{x}_2(t)}.$$

那么，对于裂纹尖端的运动方程(15.53)能重新写为：

$$\frac{d\xi_2}{d\eta} = \frac{(2\pi\mu G)^2}{\left\{\int_{x_2-\beta t}^{x_2} p[x, t-(x_2-x)/\beta]\frac{dx}{\sqrt{x_2-x}}\right\}^4}. \tag{15.62}$$

以上方程仅当

$$\int_{x_2-\beta t}^{x_2} p[x, t-(x_2-x)/\beta]\frac{dx}{\sqrt{x_2-x}} \geqslant (2\mu\pi G)^{1/2} \tag{15.63}$$

时成立。否则，裂纹尖端不运动，$\dot{x}_2(t) = 0$，在那种情况下，

$$\frac{d\xi_2}{d\eta}=1. \tag{15.64}$$

条件(15.63)能够用一个离散的 $p(\xi_n, \eta_m)$ 的数值积分来检查。然后用(15.62)或(15.64)，通过

$$\xi_2(\eta_{m+1})=\xi_2(\eta_m)+\frac{d\xi_2}{d\eta}\Delta\eta$$

来确定裂纹尖端的位置，式中 $\Delta\eta$ 是 η 网格的间距。

井田(Ida, 1973)选择了不同参数 u_c，γ 和 σ^d_{yz} 进行了数值计算，发现了依赖这些参数有两种明显不同的破裂传播类型。一种类型是一个平滑的破裂传播，即一旦破裂开始，裂纹尖端被平滑地加速，接近剪切波速度。在图 15.23 中给出了一个平滑传播的例子。这里时间 t 是以 $t_c=\pi\mu G/2\beta p_0^2$ 为单位来测量的。这就

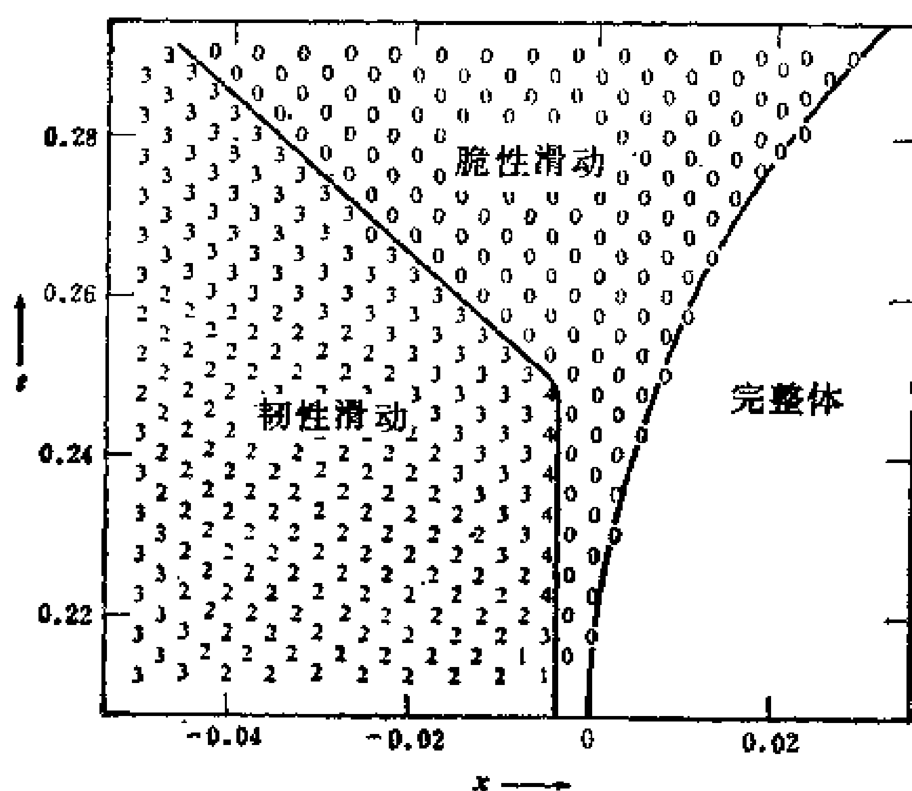


图 15.23

以 p_0 为单位的 $\sigma_{yz}(x, t)$ 图。在这种情况下，发生平滑破裂传播(引自 Ida, 1973)

是在(15.56)中给出的延迟时间，它相当于在(15.61)给出的应力降。在前述的一个半无限裂纹停止的例子中，我们讨论过地震的 t_c 的大小。距离 x 以单位 βt_c 来量度，图 15.23 中的数字是以 p_0 为单位表示 $\sigma_{yz}(x, t)$。参数选择为 $\gamma=2\mu/\beta$，$v_c=2.1\times(\beta p_0/\mu)$，以及 $\sigma_{yz}^d=0$。在平滑破裂传播的情况下，裂纹区域(在 $\sigma_{yz}^d=0$ 情况下 $\sigma_{yz}=0$)在两个方向上都扩展了。

对于稍有不同的参数，裂纹传播的模型是十分不同的。其结果在图 15.24 中给出，其中 $\gamma=2\mu/\beta$，$v_c=2.6\times(\beta p_0/\mu)$，和 $\sigma_{yz}^d=0$。裂纹传播是十分不规则的：裂纹尖端移动一个短距离，然后停止，重新开始，然后再停止。并重复这一过程。断层面一旦裂开，因为滑动率降到 v_c 以下，能够很快愈合。因此，愈合面随着裂纹尖端以相同速度传播，使有效裂纹长度始终保持在一常数附近。

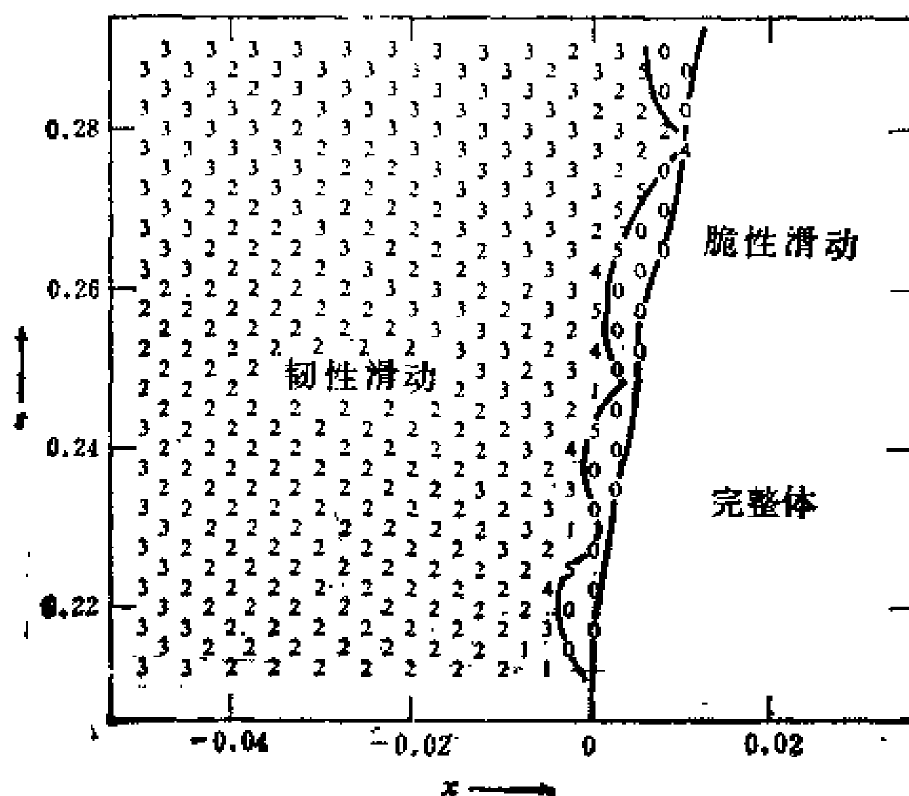


图 15.24

以 p_0 为单位的 $\sigma_{yz}(x,t)$ 图。一种非正规的传播（引自 Ida，1973）

正如在第十四章所讨论过的，远场地震波的高频波谱主要是由破裂核和停止点的贡献组成。所以我们预计一个非正规破裂过程有一个复杂的长时间持续的高频波，见图15.24。此外，一个平滑的地震，像图15.23所示的地震那样，将产生大的、长周期的波，这与和初始及最后停止点相关联的短周期相位有所区别。

井田的结果表明，在 μ/β（与平面剪切波相联系的阻抗（补充5.4））变得比 p_0/v_c 更低时，会产生平滑破裂。因此，大致上讲：当蠕变区域的阻抗较弹性区域更高时，将产生平滑传播。对一个给定 v_c，在较低的摩擦应力 σ^{d}_{yz} 将发生平滑破裂。

无内聚力的裂纹

Burridge 与 Halliday(1971)研究了法平面裂纹，它在均匀半空间内的一定深度上沿一条线成核，裂纹既向上又向下传播。它们的破裂判据是(15.53)的一种特殊情况，其中令表面能 G 为零。从(15.53)，$G=0$ 的条件不是由

$$v=\beta$$

就是由

$$\int_{x_2-\beta t}^{x_2} p[x,t-(x_2-x)/\beta]\frac{dx}{\sqrt{x_2-x}}=0 \qquad (15.65)$$

所保证。方程(15.65)只有 $p(x,t)$ 沿上述积分路径改变符号时才是可能的。如果(15.65)不成立，裂纹尖端必须以剪切波速度传播。所以，为了使裂纹的传播减慢，必须假定一个负应力降。取 x 轴垂直向下，Burridge 与 Hallipay 考虑应力降为

$$p(x,t)=p_0(1-x^2/b^2), \qquad (15.66)$$

式中 p_0 是一个常数。裂纹尖端以速度 β 向下传播并通过深度 b，直到来自负 p 的贡献和来自满足方程(15.65)的正 p 的贡献相匹配时为止。然后裂纹尖端以一个由方程(15.65)所确定的速度运动到更深处。因而在深度 b 以上断层面的应力降到一个更低值，但在 b 之下跳跃到一个更高的值。在下节讨论切平面裂纹问题时，我们将回过来再研究无内聚力破裂问题。

15.2.3 切平面剪切裂纹的自然传播

现在让我们来考虑一个切平面剪切裂纹的自然传播。作为法平面的情况，裂纹位于 $y=0$ 的平面上，它在 z 方向延伸到无限，而在 t 时刻 x 方向上却被限制于 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 之间。对于切平面情况，不为零的位移分量是 $u(x,y,t)$ 与 $v(x,y,t)$（见 14.2.4 节）。在 15.2.1 节中所研究过的法平面情况下，我们假定最初没有裂纹且物体处于初始应力为 σ^0 的平衡状态下，我们以这个初始状态为参考状态并测量相对初始状态的位移。那么初始条件为

$$u=v=0 \text{ 和} \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=0 \quad t<0$$

于是，总应力为 $\sigma=\sigma^0+\tau$。当裂纹形成时，裂纹上的 σ_{xy} 从 σ^0_{xy} 降到动摩擦应力 σ^d_{xy}。令应力降 $\sigma^0_{xy}-\sigma^d_{xy}=p(x,t)$，对适合于上述选择的参考状态，在裂纹上应力增量的边界条件为

$$\tau_{xy}=-p(x,t) \quad x_1(t)<x<x_2(t),y=0. \tag{15.67}$$

正如在 14.2.4 节所证明的，在 $y=0$ 上 $v(x,y,t)$ 和 $\tau_{xy}(x,y,t)$ 的连续性导致了一个对称性关系，即 $u(x,y,t)$ 和 $\tau_{yy}(x,y,t)$ 是 y 的奇函数，而 $v(x,y,t)$ 和 $\tau_{xy}(x,y,t)$ 是 y 的偶函数。由于 τ_{yy} 在 $y=0$ 上连续，τ_{yy} 在 $y=0$ 上必定为零，

$$\tau_{yy}=0, \quad y=0. \tag{15.68}$$

在裂纹外 $y=0$ 处，我们需要另一个条件。这是由于 u 的连续性给出的。因为 y 的连续奇函数在 $y=0$ 上必定为零，所以有

$$u=0 \quad x<x_1(t),x_2(t)<x,y=0. \tag{15.69}$$

方程(15.67)通过(15.69)给出了在 $y=0$ 上的边界条件。由于对称性，只考虑在 $y<0$ 的半空间内的一个解就足够了。

对于 $y\leqslant 0$，且 $y=0$ 为自由表面的均匀半空间，我们将把二维 Green 函数 $g_{xt}(x,y,t;\xi,y,\tau)$ 与 $g_{yt}(x,y,t;\xi,y,\tau)$ 定义为在 (x,y,t) 处观测到的位移分量 u 和 v，这两个位移分量是由于在 ξ 方向上 (ξ,y,τ) 处施加一个线脉冲力所引起的。然而，根据表示定理(2.43)，由于 g_{xt}，g_{yt} 满足应力自由边界条件，且因为在 $y=$

0 上 $\tau_{yy}=0$，于是有

$$u(x,y,t)=\iint\limits_S \tau_{xy}(\xi,\tau)g_{x\xi}(x,y,t;\xi,0,\tau)d\xi d\tau,$$

$$v(x,y,t)=\iint\limits_S \tau_{xy}(\xi,\tau)g_{yt}(x,y,t;\xi,0,\tau)d\xi d\tau.$$

由因果关系推知积分区域 S 是(ξ,τ)平面上的区域，即有

$$\alpha^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-y^2\geqslant 0\quad t\geqslant\tau\geqslant 0,$$

其中 α 是 p 波速度。上述表达式对于在裂纹平面 $y=0^-$上的位移也是成立的，对此，我们是特别感性趣的。在这种情况下，积分区域是由下式所决定的(ξ,τ)平面内的一个三角形 S_0：

$$\alpha^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2\geqslant 0\quad t\geqslant\tau\geqslant 0,$$

以及

$$\begin{aligned} u(x,0,t)&=\iint\limits_{S_0} \tau_{xy}(\xi,\tau)g_{xt}(x-\xi,0,t-\tau)d\xi d\tau,\\ v(x,0,t)&=\iint\limits_{S_0} \tau_{xy}(\xi,\tau)g_{yt}(x-\xi,0,t-\tau)d\xi d\tau. \end{aligned}\tag{15.70}$$

对于 Green 函数的这种表示法，适合震源(ξ,η,τ) 与接收器(x,y,t) 都在自由表面上的均匀半空间。g_{xt} 和 g_{yt} 的显式容易用 Cagniard 方法导出(6.4 节)，在 $y=\eta=0$ 时，它们是特别简单的。在这种情况下，结果为

$$\begin{aligned} g_{xt}(x,0,t)&=\frac{4\sigma^2}{\pi\mu\beta^2x}\ \frac{(\sigma^2-\beta^{-2})(\sigma^2-\alpha^{-2})^{1/2}}{R(\sigma)R^*(\sigma)}\quad \frac{1}{\alpha}<\sigma<\frac{1}{\beta}\\ &=\frac{1}{\pi\mu\beta^2x}\frac{(\sigma^2-\beta^{-2})^{1/2}}{R(\sigma)}\qquad \frac{1}{\beta}<\sigma,\\ g_{yt}(x,0,t)&=\frac{K_t}{\mu}\delta\left(t-\frac{x}{c_R}\right)\\ &\quad+\frac{2\sigma}{\pi\mu\beta^2x}\frac{(2\sigma^2-\beta^{-2})(\sigma^2-\alpha^{-2})^{1/2}(\beta^{-2}-\sigma^2)^{1/2}}{R(\sigma)R^*(\sigma)}, \end{aligned}\tag{15.71}$$

式中 $\sigma=t/x$，β是剪切波速度，R是 Rayleigh 函数

$$R(\sigma)=(2\sigma^2-\beta^{-2})^2-4\sigma^2(\sigma^2-\alpha^{-2})^{1/2}(\sigma^2-\beta^{-2})^{1/2},$$

而 R^* 由

$$R^*(\sigma)=(2\sigma^2-\beta^{-2})^2+4\sigma^2(\sigma^2-\alpha^{-2})^{1/2}(\sigma^2-\beta^{-2})^{1/2}$$

定义.

$$K_l=\frac{(2\beta^2/c_R^2-1)^3}{\frac{16\beta^2}{c_R^2}\left[1-\left(6-4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{\beta^2}{c_R^2}+6\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{\beta^4}{c_R^4}\right]},$$

c_R是Rayleigh波速度($R(c_R^{-1})=0$)。方程(15.71)最早是由Lamb (1904)导出的。

如果 $\tau_{xy}(\xi,t)$在整个 x 轴上是已知的，方程(15.70)应该给出问题的解答)。但是根据(15.67)，应力分量仅在裂纹面上是已知的。在裂纹以外，边界条件(15.69) 是对位移分量 u 给的。把(15.70)的积分区域 S_0 分成裂纹内 $[x_1(t)<x<x_2(t)]$的一部分 S_1，和另外一部分 S_2，其中 τ_{xy} 可以由(15.67) 求得。可以把条件(15.69)重新写为

$$\iint_{S_1}p(\xi,\tau)g_{x\xi}(x-\xi,0,t-\tau)d\xi d\tau$$

$$=\iint_{S_2}\tau_{xy}(\xi,\tau)g_{x\xi}(x-\xi,0,t-\tau)d\xi d\tau$$

$$\text{当}x<x_1(t)\text{或}x_2(t)<x, \qquad (15.72)$$

Kostrov (1975)获得了上述方程的一个解析解。但是，这个结果较之法平面裂纹情况下的结果复杂得多。例如，在法平面裂纹情况下[方程(15.52)]，应力强度因子只需一个积分来确定，现在却需要五个积分和一个差分。此外，这个结果只对裂纹尖端速度低于 Rayleigh 波速度才是有效的。在目前情况下，数字方法似乎更令人满意。

积分方程(15.70)和(15.72)先进的离散化方法是由Burridge (1969)提出的。然而有一个更适用的方法，例如滨野 (Hamano，

1974)所用的方法，似乎十分接近地重现了Burridge的结果。在滨野的方法中，x轴划分成间距为d的很多段，且取每段上的应力与位移的平均值作为该段上的值。于是，很自然要逐段的Green函数$\bar{g}(x_i-\xi_j,0,t-\tau)$来代替逐点的Green函数$g(x-\xi,0,t-\tau)$。$\bar{g}(x_i-\xi_j,0,t-\tau)$是由于在第$j$段上分布的力造成的第$i$段上的平均位移：

$$\bar{g}(x_i-\xi_j,0,t-\tau)=\frac{1}{d^2}\int_{x_i-(d/2)}^{x_i+(d/2)}dx$$

$$\times\int_{\xi_j-(d/2)}^{\xi_j+(d/2)}g(x-\xi,0,t-\tau)d\xi. \qquad (15.73)$$

因为在(15.71)式中已经给出$g_{x\xi}(x,0,t)$，所以能得到简洁形式的$\bar{g}_{x\xi}(x,0,t)$，正如Das和Aki(1977 a)所给出的那样。利用平均Green函数，积分方程(15.72)可以离散化为

$$\sum_{\substack{j\\ \text{in}}}\sum_{\substack{l\\ S_1}}p(\xi_j,\tau_l)\,\bar{\bar{g}}_{x\xi}(x_i-\xi_j,t_k-\tau_l)$$

$$=\sum_{\substack{j\\ \text{in}}}\sum_{\substack{l\\ S_2}}\tau_{xy}(\xi_j,\tau_l)\bar{\bar{g}}_{x\xi}(x_i-\xi_j,t_k-\tau_l) \qquad (15.74)$$

$$\text{当}\,x_i<x_1(t_k)\,\text{或}\,x_2(t_k)<x_i.$$

求解上述方程组的顺序可以安排为先求只含有一个未知数方程的解。一旦整个区域的τ_{xy}确定下来，位移就能够用离散化方程(15.70)计算出来。

到目前为止，我们假定裂纹尖端$x_1(t)$和$x_2(t)$的位置是已知的。我们需要某种破裂准则以确定裂纹尖端位置。最简单的破裂准则是用来确定有裂纹尖端存在时邻边网格点间的应力差，且要能够易于被合併到离散化公式(15.74)中。裂纹内点上的总应力已知是σ_{yx}^d，裂纹外的总应力为$\sigma_{xy}^0+\tau_{xy}$，其中应力增量τ_{xy}，可以通过求解(15.74)得出。于是，裂纹外较裂纹内应力要大$\tau_{xy}+\sigma_{xy}^0-\sigma_{xy}^d=\tau_{xy}+p$。只要应力差超过一指定极限值$S_c$，即

$$\tau_{xy}-\sigma_{xy}^{d}+\sigma_{xy}^{0}\geqslant S_{c}, \tag{15.75}$$

我们就假定破裂发生)。裂纹尖端移动到应力差已超出的点之外，并令点上的应力为 σ_{xy}^d。裂纹尖端两侧的应力差可看成较模糊的应力集中。从方程(15.7)可知，应力集中形式为

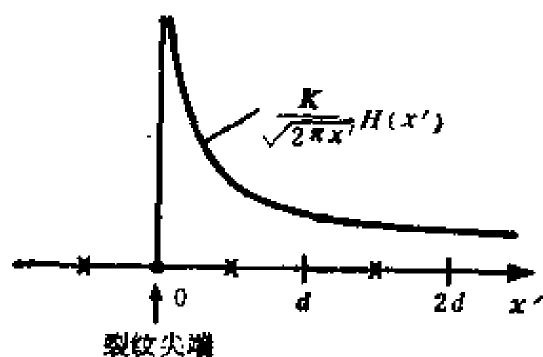


图 15.25

用叉表示的网格点

$$\sigma=\frac{K'}{\sqrt{2\pi x'}}H(x'),$$

式中 $x'=x-vt$ 是从裂纹尖端测出的距离，K' 是切平面裂纹的应力强度因子。设裂纹尖端位于图 15.25 中所示两个网格点中间。那么恰在尖端外，网格上的平均应力将是

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{d}\int_0^d\frac{K'}{\sqrt{2\pi x'}}\,dx'=2\frac{K'}{\sqrt{2\pi d}}.$$

在补充 15.2 中，我们已绍了 Irwin 的破裂准则，它是建立在临界密度因子 K_c 基础上的。相应于 K_c 的恰在尖端外的网格上的临界平均应力 $\bar{\sigma}$ 可以写为

$$S_c=2\frac{K_c}{\sqrt{2\pi d}}. \tag{15.76}$$

对于半无限的法平面裂纹的情况，Das 和 Aki (1977a) 比较了根据 S_C 准则的数值解和根据 K_c 准则的解析解。图 15.21 用实曲线表示解析解，以阶梯状线段表示数值解。附在解析解上的符号 T_C 是把由(15.56)定义的破裂开始时间 t_c，它以 α/d 归一，写成 $T_C=\alpha t_c/d$。对于一个法平面裂纹，临界应力强度因子 K_c 可以令(15.22)中 $v=0$ 求得，即 $K_C^2=4\mu G$。然后根据(15.56)，我们有 $\beta t_c=\left(\frac{\pi}{2}\right)K_C^2/(2\sigma_{yz}^0)^2$。另一方面，在数值解上的参数 S 与 S_C 的关系式为 $1+S=S_C/(\sigma_{yz}^0-\sigma_{yz}^d)$。若假定关系式(15.

76)是正确的，我们应该发现 T_c 与 S 之间的关系为 $T_c=(\pi/4)^2(\alpha/\beta)(1+S)^2\sim1.07(1+S)^2$，其中我们考虑了在推导（15.56）时所做出的假定 $\sigma^d_{xy}=0$。图 15.21 表明，对于大的 S，方程(15.76)是很近似于实际值的。对于小的 S，(15.76)中的常数因子必定稍大于 2 。当 S 在 0.5 至 5 的范围内时，该常数合适的范围是 2.10 至 2.53。对于一给定的 S_c，S 将随着 网格 长度 变小而增加。

因此，临界应力差 S_c 的破裂准则与临界强度因子的破裂准则也许是大致相同的，后一个准则在补充 15.2 中 称为 Irwin 准则。正如在补充中讨论的那样，Irwin 准 则与 Griffith 准 则 就破裂扩展的产生而论是等效的。但是当破裂速 度为一有限值时，两个准则是不相同的，且依据 S_c 的破裂准则和依据 Griffith 准则的差别是由不同的裂纹尖端运动造成的，如图 15.21 所示。

Andrews(1976)利用井田描述的内聚力把Griffith 准则(15.1.3 节)引入切平面剪切裂纹传播的有 限差分计 算之中。 他假定断层面上的牵引力与滑动 Δu 有关(见图 15.26)：

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta u)&=\sigma_s-(\sigma_s-\sigma_d)\Delta\mu/D \qquad & \Delta u<D,\\ \sigma(\Delta u)&=\sigma_d & \Delta u\geqslant D,\end{aligned} \tag{15.77}$$

式中 σ_s 是静摩擦，σ_d 是动摩擦，而 D 是使应力降到 σ_d 所需 要的滑动。破裂阵面所做的、超过克服动摩擦应力 σ_d 所 作的 非弹性功，定义为表面能(系指产生裂纹的每单位表面)，

$$G=\frac{1}{4}(\sigma_s-\sigma_d)D. \tag{15.78}$$

接下去必须给出断层面上的边界条件：当裂纹不滑动时，

$$|\sigma^0_{xy}+\tau_{xy}|\leqslant\sigma(\Delta u)\text{若}\ \frac{\partial\Delta u}{\partial t}=0,$$

而滑动时，

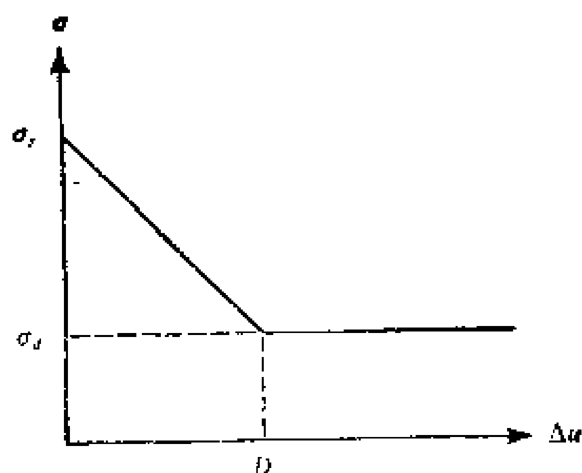


图 15.26

井田(Ida, 1972)与 Andrews(1976)使用的内聚力和滑动间的关系。σ_s是在这种水平上静摩擦的上限，即不稳定性开始且发生弱化。若滑动大于 D，应力下降到动摩擦 σ_d。影区面积相当于表面能，即反抗内聚力所作的功(见 15.1.3 节)(引自 Andrews，1976)

$$\sigma_{xy}^0+\tau_{xy}=\sigma(\Delta u)\mathrm{sign}\left(\frac{\partial\,\Delta u}{\partial t}\right)\text{若}\frac{\partial\Delta\ u}{\partial t}\neq 0.$$

在这种边界条件下，裂纹传播是沿 $+x$ 与 $-x$ 方向对称的扩展。用两个无量钢的数 L_c/L 与$(\sigma_s-\sigma_0)/(\sigma_0-\sigma_d)$来讨论这些结果，其中 σ_0 是初始应力 σ_{xy}^0，而 L_c 是切平面 Griffith裂纹的临界半长度，它可以由方程(15.16)得出。取极限为 $v\to 0$，则临界应力强度因子 K_c 将满足下述方程：

$$\begin{aligned}G&=\frac{g}{2v}\\&=\frac{1}{16}\frac{K_c^2}{\mu\beta^2}\lim_{v\to 0}\frac{v^2}{\left(1-\frac{v^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{v^2}{2\beta^2}\right)^2\left(1-\frac{v^2}{\beta^2}\right)^{-1/2}}\\&=\frac{K_c^2\lambda+2\mu}{8\mu\lambda+\mu}.\end{aligned}\qquad(15.79)$$

由补充 15.1 的方程(9)，应为强度因子 K' 与裂纹半长度 L 的关系为 $K'=(\sigma_0-\sigma_d)\sqrt{\pi L}$。所以，临界半长度 L_c 为：

$$L_c = \frac{8\mu(\lambda+\mu)G}{\pi(\lambda+2\mu)(\sigma_0-\sigma_d)^2}. \tag{15.80}$$

Das 和 Aki(1977a)利用滨野的方法，根据前面所讨论的 S_c 破裂准则求解了同样的问题，他们把由(15.76)式得到的 K_c值代入$K=(\sigma_0-\sigma_d)\sqrt{\pi L}$，求得

$$L_c = d\frac{S_c^2}{2(\sigma_0-\sigma_d)^2}. \tag{15.81}$$

另一个参数$(\sigma_s-\sigma_0)/(\sigma_0-\sigma_d)$，不是别的，恰恰是图 15.21 讨论中所用的参数 S：

$$S=\frac{S_c}{\sigma_0-\sigma_d}-1=\frac{\sigma_s-\sigma_d}{\sigma_0-\sigma_d}-1=\frac{\sigma_s-\sigma_0}{\sigma_0-\sigma_d}. \tag{15.82}$$

两种方法计算的结果大体上是一致的。在图 15.27 中只复制了 Andrews 的结果。存在两种明显不同的破裂传播类型。如果参数 S 大于 1.63，破裂传播速度总是小于 Rayleigh 波速度 c_R，但当裂纹长度增加时，其速度接近 c_R。否则，若 S 小于 1.63，破裂则以亚 Rayleigh 波速度开始，而当裂纹长度超过一定限度时(它取决于 S)，破裂速度超过剪切波速度，随着裂纹长度的增加，它将接近 P 波速度。$S=1.63$ 的临界值是由 Burridge (1973)获得的，他利用的是法平面裂纹传播例子中所讨论过的无内聚力破裂准则(p.901)。由于无内聚力裂纹无法维持任何应力奇异性，所以它的传播速度不能低于 Rayleigh 波速度。它能够以Rayleigh波速度传播，此时应力强度因子为零。然而 Burridge 指出，甚至在 Rayleigh 波速度的情况下，如果 S 小于 1.63 的话，S 波阵面上裂纹前沿的应力也许超过静摩擦。在这种情况下，裂纹尖端所容许的速度是 P 波速度。在 15.1.2 节中，对裂纹尖端上的能量分布的研究结果表明，一个切平面剪切破裂速度不可能超过 Rayleigh 波速度。对于一个无内聚力的裂纹，其应力强度因子总是零，而且没有能流通过裂纹尖端。所以，从能量分布得出的结论并不适用于无内聚力裂纹。更困难的问题是为什么数值解表明

破裂传播速度超过 Rayleigh 波速度，而通过裂纹尖端的能流显然是有限的(在这种情况下已证明它是与解析解一致的)。答案在于它们的破裂准则，按照这种破裂准则，并不需要无限应力，而只要有有限应力就可使断层开始滑动。因为与裂纹尖端前沿传播着的 P 波和 S 波相联系的应力能引起断层滑动。可以说以 Rayleigh 波速度传播是有限内聚力的结果。

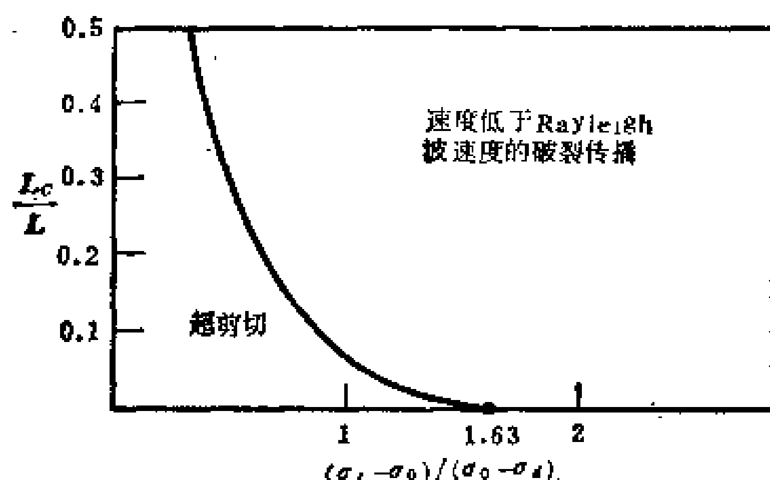


图 15.27

亚 Rayleigh 波速度和超剪切波速度破裂传播区域（引自 Andrews, 1976）

当裂纹沿一个具有障碍或阻挡层的断层平面传播时有限内聚力将产生另一个重要结果。这些阻挡层可以用 (15.75)定义的局部高 S_e 值表示。Das 和 Aki(1977b)发现，当裂纹尖端通过这样一个阻挡层时，可能发生三种不同的状况，它们取决于阻挡层强度与初始应力的相对大小。

i) 若初始应力相对较高，阻挡层一下就破碎。

ii) 若初始应力相对较低，裂纹尖端超越阻挡层时后面留下一个未破碎的阻挡层。

iii) 若初始应力适中，裂纹尖端在开始通过时，阻挡层并不破碎，但最后由于应力增加而破裂。

如果碰到类型i)的阻挡层是在整个断层面上发生的话，那么破裂传播是平滑的，产生的地震是一个简单的脉冲，并导致一个高的平均应力降。此外，如果类型ii)碰巧在许多阻挡层上发生，破裂传播就变得粗糙，产生一长序列的高频波，以及一个低平均应力降结果。对于类型iii)，结果产生具有在长周期运动上叠加着一些波动的地震图。地震辐射变得不像其他类型那样依赖于破裂传播方向，因而在裂纹中心处滑动或多或少是同时产生的，结果导致了一个有效的对称震源。三云和宫武 (Mikumo and Miyatake, 1978)获得了同样的结果，他们研究了具有二维静摩擦非均匀分布的断层面上的破裂传播。

因此，在断层面上，具有不同强度的若干阻挡层分布可能产生各种破裂过程，以用来模拟复杂的实际地震。具有阻挡层的断层模型，对于用大地震，即对人类造成很大灾害的地震，研究短周期运动是特别重要的。

建议进一步阅读的文献

Achenbach, J. D. On dynamic effects in brittle fracture. *In* S. Nemat Nasser (editor), *Mechanics Today* (Vol. 1). New York: Pergamon Press, 1974.

Andrews. D. J. Rupture velocity of plane-strain shear cracks. *Journal of Geophysical Research*, **81**, 5679—5687, 1976.

Freund, L. B. Crack propagation in an elastic solid subject to general loading. II. Nonuniform rate of extension. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **20**, 141—152, 1972.

Freund, L. B. The analysis of elastodynamic crack tip stress fields. *In* S. Nemat-Nasser (editor), *Mechanics Todays* (Vol. 3). New York: Pergamon Press, 1976.

Freund, L. B. Dynamic crack propagation. *In* F. Erdogan

(editor), *The Mechanics of Fracture* (Vol. 19). American Society of Mechanical Engineers (Applied Mechanics Division), 1976.

Liebowitz, H. (editor). *A Treatise on Fracture* (Vol. 2). New York: Academic Press, 1968.

Madariaga, R. Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **65**, 163–182, 1976.

Madariaga, R. High frequency radiation from crack (stress drop) models of earthquake faulting. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **51**, 625—651, 1977.

Orowan, E. Mechanism of seismic faulting. *In*. D. Griggs and J. Handin (editors), *Rock Deformation* (Chapter 12). Geological Society of America, 1960.

Palmer, A. C. and J. R. Rice, The growth of slip surfaces in the progressive failure of overconsolidated clay, *Proceedings of the Royal Society of London*, A **332**, 527–548, 1973.

Rice, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by cracks and notches. *Journal of Applied Mechanics*, **35**, 379–386, 1968.

问　题

15.1 a)如果跨断层表面Σ上的滑动为位置和时间的已知函数，这是否足以完全确定被断层所贯穿的介质的运动(假定没有其它源在活动)?如果你的回答"是"。那么解释一下为什么这一结果在震源理论中仅是有限地使用。如果回答"否"，那么描述对于震源还必须知道些什么才能确定由其辐射出的运动。

b)假设我们知道在发生滑动的断层表面上[即在$\Sigma(t)$上]，

所有时间的牵引力，而不知道滑动。是否以确定从断层辐射出去的运动？按上面注释的要求来回答（是还是否）。

15.2 对于在 15.2.2 节中描述的半有限裂纹的例子，应力强度因子由下式给出：

$$K=\frac{(1-\dot{x}_2/\beta)^{1/2}}{\sqrt{\pi/2}}\int_{x_2-\beta t}^{x_2}p(x,t-(x_2-x)/\beta)\frac{dx}{\sqrt{x_2-x}}$$

$$=\frac{2(1-\dot{x}_2/\beta)^{1/2}\tau_0}{\sqrt{\pi/2}}\sqrt{\beta t}.$$

在那个例子里，假定表面能 G 与破裂速度无关，然后导出了裂纹尖端的运动。证明，若临界应力强度因子是常数而不是 G，裂纹尖端运动为

$$x_2(t)=\beta(t-t_c)-\beta t_c\ln t/t_c.$$

这条曲线与常数 G 的曲线已在图 15.21 中一并给出。

15.3 对于切平面抗拉裂纹，破裂传播总是较 Rayleigh 波速度更低一些，甚至在有限内聚力情况下也是如此。试就与适合张裂纹的 Green 函数的 P 波与 S 波部分有关的应力观念进行研究，进一步证实这个结论。

参 考 文 献

Abe, K.

1975 Static and dynamic fault parameters of the Saitama earthquake of July 1, 1968. *Tectonophysics* 27:223–238.

Abramowitz, M., and I. A. Stegun

1965 *Handbook of Mathematical Functions* (4th printing). U.S. Government Printing Office

Aki, K.

1960 Study of earthquake mechanism by a method of phase equalization applied to Rayleigh and Love waves. *Journal of Geophysical Research* 65:729–740.

1961 Crustal structure in Japan from the phase velocity of Rayleigh waves. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo Univ.* 39:255–283.

1967 Scaling law of seismic spectrum. *Journal of Geophysical Research* 72:1217–1231.

1968 Seismic displacements near a fault. *Journal of Geophysical Research* 73:5359–5376.

1973 Scattering of *P* waves under the Montana Lasa. *Journal of Geophysical Research* 78:1334–1346.

1976 Signal to noise ratio in seismic measurements. *In* H. Aoki and S. Iizuka (editors), *Volcanoes and Tectonosphere*. Tokyo: Tokai University Press.

1977 Three dimensional seismic velocity anomalies in the lithosphere. Method and summary of results. *Journal of Geophysics* 43:235–242.

Aki, K., A. Christoffersson, and E. S. Husebye

1976 Determination of the three-dimensional seismic structures of the lithosphere. *Journal of Geophysical Research* 82:277–296.

Aki, K., and K. L. Larner

1970 Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane *SH* waves. *Journal of Geophysical Research* 75:933–954.

Aki, K., and W. H. K. Lee

1976 Determination of three-dimensional velocity anomalies under a seismic array using first *P* arrival times from local earthquakes. 1. A homogeneous initial model. *Journal of Geophysical Research* 81:4381–4399.

Alford, R. M., K. R. Kelly, and D. M. Boore

1974 Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics* 39:834–842.

Alsop, L. E.

1966 Transmission and reflection of Love waves at a vertical discontinuity. *Journal of Geophysical Research* 71:3969–3984.

Alsop, L. E., G. H. Sutton, and M. Ewing
1961a Free oscillations of the Earth observed on strain and pendulum seismographs. *Journal of Geophysical Research* 66:631–641.

Alterman, Z. S., and F. C. Karal, Jr.
1968 Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:367–398.

Alterman, Z. S., and A. Rotenberg
1969 Seismic waves in a quarter plane. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:347–368.

Ambuter, B. P., and S. C. Solomon
1974 An event-recording system for monitoring small earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:1181–1188.

Andersen, N. O.
1974 On the calculation of filter coefficients for maximum entropy spectral analysis. *Geophysics* 39:69–72.

Anderson, J. G.
1976 Motions near a shallow rupturing fault: Evaluation of effects due to the free surface. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:575–593.

Anderson, J. G., and P. G. Richards
1975 Comparison of strong ground motion from several dislocation models. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 42:347–373.

Andrews, D. J.
1975 From anti-moment to moment: Plane strain models of earthquakes that stop. *Bulletin of the Seismological Society of America* 65:163–182.
1976 Rupture velocity of plane-strain shear cracks. *Journal of Geophysical Research* 81:5679–5687.

Ang, D. D., and M. L. Williams
1959 The dynamic stress field due to an extensional dislocation. *Proceedings of the Fourth Midwestern Conference on Solid Mechanics.* Austin: Univ. Texas Press.

Archambeau, C. B.
1968 General theory of elasto-dynamic source fields. *Review of Geophysics* 16:241–288.

Asada, T.
1957 Observations of nearby microearthquakes with ultrasensitive seismometers. *Journal of the Physics of the Earth* 5:83–113.

Backus, G., and F. Gilbert
1967 Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 13:247–276.
1968 The resolving power of gross earth data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 16:169–205.

1970 Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A266:123–192.

Barenblatt, G. I.
1959 The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 23:622–636.

Benioff, H., F. Press, and S. W. Smith
1961 Excitation of the free oscillations of the earth by earthquakes. *Journal of Geophysical Research* 66:605–620.

Ben-Menahem, A.
1961 Radiation of seismic surface waves from finite moving sources. *Bulletin of the Seismological Society of America* 51:401–435.

Ben-Menahem, A., and M. N. Toksöz
1963 Source mechanism from spectra of long period surface waves. *Journal of Geophysical Research* 68:5207–5222.

Berckhemer, H.
1962 Die ausdehnung der Bruchfläche im Erdbeben herd und ihr Einfluss auf das seismische Wellen spektrum. *Gerlands, Beitr. Geophys.* 71:5–26.

Bessonova, E. N., V. M. Fishman, V. Z. Ryaboyi, and G. A. Sitnikova
1974 The tau method for inversion of travel times. I. Deep seismic sounding data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 36:377–398.

Blackman, R. B., and J. W. Tukey
1958 *The Measurement of Power Spectra*. New York: Dover Publications Inc., p. 190.

Boatwright, J., and D. M. Boore
1975 A simplification in the calculation of motions near a propagating dislocation. *Bulletin of the Seismological Society of America* 65:133–138.

Böcher, M.
1909 *An Introduction to the study of Integral Equations.* Cambridge University Press, p. 9.

Bogdanov, V. I., and V. M. Graizer
1976 Determination of remaining ground displacement from seismograms. *Dokladi, Acad. Nauk, S.S.S.R.* 229:59–62

Bolt, B. A.
1962 Gutenberg's early *PKP* observations. *Nature* 196:122–124.
1964 The velocity of seismic waves near the Earth's center. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:191–208.

Boore, D. M.
1970 Love waves in a non-uniform wave-guide: Finite difference calculation. *Journal of Geophysical Research* 75:1512–1527.
1972 Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations* (Methods in Computational Physics, Vol. 11). New York: Academic Press.

Boore, D. M., K. Larner, and K. Aki

1971 Comparison of two independent methods for the solution of wave scattering problems: Response of a sedimentary basin to vertically incident SH waves. *Journal of Geophysical Research* 76:558–569.

Boore, D. M., and Zoback, M. D.

1974 Near-field motions from kinematic models of propagating faults. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:321–342.

Bouchon, M.

1973 Effect of topography on surface motion. *Bulletin of the Seismological Society of America* 63:615–632.

1979 Predictability of ground displacement and velocity at proximity of an earthquake. An example: The Parkfield earthquake of 1966. *Journal of Geophysical Research.* In press.

Bouchon, M., and K. Aki

1977a Near-field of a seismic source in a layered medium with irregular interfaces. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 50:669–684.

1977b Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67:259–277.

Brune, J. N.

1960 Radiation patterns of Rayleigh waves from the southeast Alaska earthquake of July 10, 1958. *Publications of the Dominion Observatory of Ottowa* 24(10): 373–383.

1970 Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes. *Journal of Geophysical Research* 75:4997–5009.

Brune, J. N., and J. Dorman

1963 Seismic waves and Earth structure in the Canadian Shield. *Bulletin of the Seismological Society of America* 53:167–210.

Budiansky, B., and R. J. O'Connell

1976 Elastic moduli of a cracked solid. *International Journal of Solid Structures* 12:81–97.

Buland, R.

1976 The mechanics of locating earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:173–187.

Burg, J. P.

1964 Three-dimensional filtering with an array of seismometers. *Geophysics* 29:693–713.

1967 Maximum entropy spectral analysis. Paper presented at the 37*th Annual International SEG Meeting*, Oklahoma City, Oklahoma, October 31, 1967.

Burridge, R.

1969 The numerical solution of certain integral equations with non-integrable kernels arising in the theory of crack propagation and elastic wave diffraction. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A265:353–381.

1973 Admissible speeds for plane-strain self-similar shear cracks with friction but lacking cohesion. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 35:439–456.

Burridge, R., and G. S. Halliday
1971 Dynamic shear cracks with friction as models for shallow focus earthquakes. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 25:261–283.

Burridge, R., and J. Willis
1969 The self-similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 66:443–468.

Capon, J.
1969 High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers* 57:1408–1418.
1974 Characterization of crust and upper mantle structure under Lasa as a random medium. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:235–266.

Capon, J., R. J. Greenfield, R. J. Koller, and R. T. LaCoss
1968 Short-period signal processing results for the large aperture seismic array. *Geophysics* 33:452–472.

Capon, J., R. J. Greenfield, and R. T. LaCoss
1969 Long-period signal processing results for the large aperture seismic array. *Geophysics* 34:305–329.

Carotta, R., and D. Michon
1967 Continuous analysis of the velocity function and of the move out corrections. *Geophysical Prospecting* 15:584–597.

Chernov, L. A.
1960 *Wave Propagation in a Random Medium*. New York: McGraw-Hill.

Claerbout, J. F.
1964 Detection of *P*-waves from weak sources at great distances. *Geophysics* 29:197–211.
1968 Synthesis of a layered medium from its acoustic transmission response. *Geophysics* 33:264–269.
1970 Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure. *Geophysics* 35:407–418.
1976 *Fundamentals of Geophysical Data Processing*. New York: McGraw-Hill.

Claerbout, J. F., and F. Muir
1973 Robust modeling with erratic data. *Geophysics* 38:826–844.

Clowes, R. M., E. R. Kanasewich, and G. L. Cumming
1968 Deep crustal seismic reflections at near-vertical incidence. *Geophysics* 33:441–451.

Cooley, J. W., P. A. W. Lewis, and P. D. Welch
1969 The fast Fourier transform and its applications. *Institute of Electrical and Electronic Engineers Transactions, Education* 12:27–34.

Cooley, J. W., and J. W. Tukey
1965 An algorithm for the machine computation of complex Fourier series. *Math. Comput.* 19:297–301.

Crank, J., and P. Nicolson
1947 A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 43:50–67.

Crosson, R. S.
1976a Crustal structure modeling of earthquake data. 1. Simultaneous least square estimation of hypocenter and velocity parameters. *Journal of Geophysical Research* 81:3036–3046.
1976b Crustal structure modeling of earthquake data. 2. Velocity structure of the Puget Sound region, Washington. *Journal of Geophysical Research* 81:3047–3054.

Dahlen, F. A.
1969 The normal modes of a rotating, elliptical Earth. II. Near-resonance multiplet coupling. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18:397–436.
1974 On the ratio of *P*-wave to *S*-wave corner frequencies for shallow earthquake sources. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:1159–1180.

Dainty, A. M., M. N. Toksöz, K. R. Anderson, P. J. Pines, Y. Nakamura, and G. Latham
1974 Seismic scattering and shallow structure of the moon in Oceanus Procellarum. *The Moon* 9:11–29.

Dantzig G. B.
1963 *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press.

Das, S., and K. Aki
1977a A numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 50:643–668.
1977b Fault plane with barriers: A versatile earthquake model. *Journal of Geophysical Research* 82:5658–5670.

DeGolyer, E.
1935 Notes on the early history of applied geophysics in the petroleum industry. *Journal of the Society of Petroleum Geophysicists* 6:1–10.

Der, Z., R. Massé, and M. Landisman
1970 Effects of observational errors on the resolution of surface waves at intermediate distances. *Journal of Geophysical Research* 75:3399–3409.

Dewey, J. W.
1972 Seismicity and tectonics of Western Venezuela. *Bulletin of the Seismological Society of America* 62:1711–1751.

Dewey, J., and P. Byerly
1969 The early history of seismometry (to 1900). *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:183–277.

Dieterich, J. H.
1973 A deterministic near-field source model. *Proceedings of the 5th World Conference of Earthquake Engineers*, Rome.

Doornbos, D. J., and E. S. Husebye
1972 Array analysis of *PKP* phases and their precursors. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 5:387–399.

Dorman, J., M. Ewing, and J. Oliver
1960 Study of shear-velocity distribution in the upper mantle by mantle Rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 50:87–115.

Dorman, J., and M. Ewing
1962 Numerical inversion of seismic surface wave dispersion data and crust-mantle structure in the New York–Pennsylvania area. *Journal of Geophysical Research* 67:5227–5241.

Douglas, A.
1967 Joint epicentre determination. *Nature* 215:47–48.

Dziewonski, A. M., and F. Gilbert
1976 The effect of small aspherical perturbations on travel-times and a re-examination of the corrections for ellipticity. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 44:7–17.

Dziewonski, A. M., and A. L. Hales
1972 Numerical analysis of dispersed seismic waves. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations* (Methods in Computational Physics, Vol. 11). New York: Academic Press.

Edmonds, A. R.
1960 *Angular Momentum In Quantum Mechanics*. Princeton University Press.

Ellsworth, W. L.
1977 Three-dimensional structure of the crust and mantle beneath the Island of Hawaii. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

Engdahl, E. R.
1973 Relocation of intermediate depth earthquakes in the central Aleutians by seismic ray tracing. *Nature, Physical Science* 245:23–25.

Engdahl, E. R., E. A. Flinn, and C. F. Romney
1970 Seismic waves reflected from the Earth's inner core. *Nature* 228:852–853.

Eshelby, J. D.
1949 Uniformly moving dislocations. *Proceedings of the Physical Society* A62: 307–314.
1957 The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London* A241:376–396.

Evernden, J. F.
1967 Magnitude determination at regional and near-regional distances in the United States. *Bulletin of the Seismological Society of America* 57:591–639.
1969 Precision of epicenters obtained by small numbers of worldwide stations. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:1365–1398.

Ewing, J. A.
1881 The earthquake of March 8, 1881. *Transactions of the Seismological Society of Japan* 3:121–128.

Ewing, M., A. P. Crary, and H. N. Rutherford
1937 Geophysical investigations in the emerged and submerged Atlantic coastal plain, methods and results. *Bulletin of the Geological Society of America* 48:753–802.

Ewing, M., W. Jardetzky, and F. Press
1957 *Elastic Waves in Layered Media.* New York: McGraw-Hill, p. 380.

Ewing, M., J. L. Worzel, J. B. Hersey, F. Press, and G. R. Hamilton
1950 Seismic refraction measurements in the Atlantic Ocean Basin. *Bulletin of the Seismological Society of America* 40:233–242.

Faddeev, L. D.
1967 Properties of the *S*-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation. *American Mathematical Society Translations Series* 2 65:139–166.

Fessenden, R.
1914 Patent application on sonic sounder, filed on April 2, 1914.
1917 Patent application on methods and apparatus for locating ore bodies, filed on January 15, 1917.

Filson, J., and T. V. McEvilly
1967 Love wave spectra and the mechanism of the 1966 Parkfield sequence. *Bulletin of the Seismological Society of America* 57:1245–1259.

Flinn, E. A.
1965 Confidence regions and error determinations for seismic event location. *Review of Geophysics* 3:157–185.

Frank, F. C.
1949 On the equations of motion of crystal dislocations. *Proceedings of the Physical Society* A62:131–134.

Franklin, J. N.
1970 Well-posed stochastic extensions of ill-posed linear problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 31:682–716.

Frasier, C. W.
1970 Discrete time solution of plane *P-SV* waves in a plane layered medium. *Geophysics* 35:197–219.

Freedman, H. W.
1967 A statistical discussion of *P* residuals from explosions. Part II. *Bulletin of the Seismological Society of America* 57:545–561.

Freund, L. B.
1972 Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid. *Journal of Elasticity* 2:341–348.

Furuya, I.
1969 Predominant period and magnitude. *Journal of Physics of the Earth* 17:119–126.

Gakenheimer, D. C., and J. Miklowitz
1969 Transient excitation of an elastic half-space by a point load travelling on the surface. *Journal of Applied Mechanics (Trans. ASME, Ser. E)* 36:505–515.

Geller, R. J.
1976 Scaling relations for earthquake source parameters and magnitudes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:1501–1523.

Gerver, M. L.
1970 Inverse problem for the one-dimensional wave equation. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 21:337–357.

Gerver, M. L., and V. Markushevitch
1966 Determination of a seismic wave velocity from the travel time curve. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 11:165–173.

Gilbert, F.
1971a The diagonal sum rule and averaged eigenfrequencies. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 23:119–123.
1971b Ranking and winnowing gross Earth data for inversion and resolution. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 23:125–128.

Gilbert, F., and A. M. Dziewonski
1975 An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A278:187–269.

Gold, B., and C. M. Rader
1969 *Digital Processing of Signals.* New York: McGraw-Hill.

Goupillaud, P. L.
1961 An approach to inverse filtering of near-surface layer effects from seismic records. *Geophysics* 26:754–760.

Griffith, A. A.
1920 The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 221:163.

Griggs, D. T., and F. Press
1961 Probing the Earth with nuclear explosions. *Journal of Geophysical Research* 66:237–258.

Gutenberg, B.
1913 Über die Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus Erdbebenbeobachtungen. *Zeitschr. für Geophys.* 14:1217–1218.

Gutenberg, B., and C. F. Richter
1954 *Seismicity of the Earth* (2nd ed.). Princeton University Press.
1956 Magnitude and energy of earthquakes. *Annali di Geofisica* 9:1–15.

Haddon, R. A. W., and J. R. Cleary
1974 Evidence for scattering of seismic PKP waves near the mantle-core boundary. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 8:211–234.

Hales, A. L.
1972 The travel times of *P* seismic waves and their relevance to the upper mantle velocity distribution. *Tectonophysics* 13:447–482.

Hamano, Y.
1974 Dependence of rupture-time history on the heterogeneous distribution of stress and strength on the fault plane (abstract). *EOS, Transactions of the American Geophysical Union* 55:362.

Hanson, M. E., A. R. Sanford, and R. J. Shaffer
1971 A source function for a dynamic bilateral brittle shear failure. *Journal of Geophysical Research* 76:3375–3383.

Harkrider, D. G.
1964 Surface waves in multilayered elastic media I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half space. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:627–679.

Hartley, H. O.
1961 The modified Gauss-Newton method for fitting of non-linear regression functions by least squares. *Technometrics* 3:269–280.

Haskell, N. A.
1964 Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:377–394.
1966 Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults. II. *Bulletin of the Seismological Society of America* 56: 125–140.
1969 Elastic displacements in the near-field of a propagating fault. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:865–908.

Healy, J. H.
1963 Crustal structure along the coast of California from seismic-refraction measurements. *Journal of Geophysical Research* 68: 5777–5787.

Heaton, T. H. and D. V. Helmberger
1977 A study of the strong ground motion of the Borrego Mt., California, earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67:315–330.

Helmberger, D. V.
1968 The crust-mantle transition in the Bering Sea. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:179–214.

Herglotz, G.
1907 Über das Benndorfsche Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen. *Zeitschr. für Geophys.* 8:145–147.

Herrin, E.
1968 Seismological tables for *P* phases. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:1193–1242.
1969 Regional variation of *P*-wave velocity in the upper mantle beneath North America. *In* P. J. Hart (editor), *The Earth's Crust and Upper Mantle* American Geophysical Union Monograph (Vol. 13).

Herrin, E., and J. Taggart
1962 Regional variations in the P_n velocity and their effect on the location of epicenters. *Bulletin of the Seismological Society of America* 52:1037–1046.

Higuchi, S.
1932 On Love dispersion in a complicated surface layer (in Japanese). *Zisin*, Series I, 4:271–276.

Hill, M. N.
1963 Single-ship seismic refraction shooting in the sea. Ideas and observations on progress in the study of the seas. *The Earth Beneath the Sea* (Vol. 3). New York: Interscience.

Hirasawa, T., and W. Stauder
1965 On the seismic body waves from a finite moving source. *Bulletin of the Seismological Society of America* 55:1811–1842.

Hodgson, J. H.
1957 The null vector as a guide to regional tectonic patterns. *Publications of the Dominion Observatory of Ottawa* 20:369–384.

Honda, H.
1962 Earthquake mechanism and seismic waves. *Journal of Physics of the Earth* 10(2):1–97.

Hong, T.-L., and D. V. Helmberger
1977 Generalized ray theory for a dipping structure. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67:995–1008

Hong, T.-L., and D. V. Helmberger
1978 Glorified Optics and wave propagation in nonplanar structure. *Bulletin of the Seismological Society of America* 68:1313–1358.

Housner, G. W., and M. D. Trifunac
1967 Analysis of accelerograms—Parkfield earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America* 57:1193–1220.

Husebye, E. S., A. Christoffersson, K. Aki, and C. Powell
1976 Preliminary results on the 3-dimensional seismic structure of the lithosphere under the USGS Central California Seismic Array. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:319–340.

Husseini, M. I., D. B. Jovanovich, M. J. Randall, and L. B. Freund
1975 The fracture energy of earthquakes. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 43:367–385.

Ida, Y.
1972 Cohesive force across the tip of a longitudinal shear crack and Griffith's specific surface energy. *Journal of Geophysical Research* 77:3796–3805.
1973 Stress concentration and unsteady propagation of longitudinal shear cracks. *Journal of Geophysical Research* 78:3418–3429.

Iyer, H. M., L. C. Pakiser, D. J. Stuart, and D. H. Warren
1969 Project Early Rise: Seismic probing of the upper mantle. *Journal of Geophysical Research* 74:4409–4441.

Jackson, D. D.
1972 Interpretation of inaccurate, insufficient, and inconsistent data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 28:97–109.

Jeffreys, H.
1939 *Theory of Probability*. Oxford: Clarendon Press, p. 160.

Jeffreys, H., and K. E. Bullen
1940 *Seismological tables*. British Association, Gray-Milne Trust.

Johnson, C.
1972 Regionalized Earth models from linear programming methods. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

Johnson, L. E., and F. Gilbert
1972 Inversion and inference for teleseimic ray data. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods in Computational Physics, Vol. 12). New York: Academic Press.

Julian, B. R.
1970 Ray tracing in arbitrarily heterogeneous media. Technical Note 1970–45, Lincoln Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

Jordan, T. H.
1972 Estimation of the radial variation of seismic velocities and density in the Earth. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena.

Julian, B. R., and D. Gubbins
1977 Three-dimensional seismic ray tracing. *Journal of Geophysics* 43:95–113.

Kanai, K., and T. Tanaka
1961 On microtremors. VIII. *Bulletin of the Earthquake Research Institue*, Tokyo Univ. 39:97–114.

Kanamori, H.
1973 Mode of strain release associated with major earthquakes in Japan. *Annual Review, Earth and Planetary Sciences* 1:213–239.

Kanamori, H., and D. L. Anderson
1975 Theoretical basis of some empirical relations in seismology. *Bulletin of the Seismological Society of America* 65:1073–1095.

Kanasewich, E. R., and G. L. Cumming
1965 Near-vertical-incidence seismic reflections from the 'Conrad' discontinuity. *Journal of Geophysical Research* 70:3441–3446.

Kawasaki, I., Y. Suzuki, and R. Sato
1975 Seismic waves due to a shear fault in a semi-infinite medium. II. Moving source. *Journal of Physics of the Earth* 23:43–61.

Keilis-Borok, V. I., and T. B. Yanovskaya
1967 Inverse seismic problems (structural review). *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 13:223–233.

Kennett, B. L. N.
1972a Seismic waves in laterally inhomogeneous media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 27:301–325.
1972b Seismic wave scattering by obstacles on interfaces. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 28:249–266.

King, D. W., R. A. W. Haddon, and J. R. Cleary
1974 Array analysis of precursors to *PKIKP* in the distance range 128° to 142°. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 37:157–173.

Knopoff, L.
1958 Energy release in earthquakes. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 1:44–52.
1972 Observation and inversion of surface wave dispersion. *Tectonophysics* 13: 497–520.

Knopoff, L., M. J. Berry, and F. A. Schwab
1967 Tripartite phase velocity observations in laterally heterogeneous regions. *Journal of Geophysical Research* 72:2595–2601.

Koehler, H., and M. T. Taner
1977 The direct and inverse problems relating reflection coefficients and reflection response for horizontally layered media. *Geophysics* 42:1199–1206.

Kosminskaya, I. P., and Y.-V. Riznichenko
1964 Seismic studies of the Earth's crust in Eurasia. *In* H. Odishaw (editor), *Solid Earth and Interface Phenomena* (Research in Geophysics, Vol. 2) Cambridge: M.I.T. Press.

Kostrov, B. V.
1966 Unsteady propagation of longitudinal shear cracks, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 30:1241–1248.
1975 On the crack propagation with variable velocity. *International Journal of Fracture* 11:47–56.

LaCoss, R. T.
1971 Data adaptive spectral analysis methods. *Geophysics* 36:661–675.

LaCoss, R. T., E. J. Kelly, and M. N. Toksöz
1969 Estimation of seismic noise structure using arrays. *Geophysics* 34:21–38.

Lamb, H.
1904 On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A203:1–42.

Lanczos, C.
1961 *Linear Differential Operators*. London: Van Nostrand.

Landers, T., and J. F. Claerbout
1972 Numerical calculations of elastic waves in laterally inhomogeneous media. *Journal of Geophysical Research* 77:1476–1482.

Landisman, M., A. Dziewonski, and Y. Satô
1969 Recent improvements in the analysis of surface wave observations. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 17:369–403.

Langston, C. A.
1976 Body wave synthesis for shallow earthquake sources: Inversion for source and Earth structure parameters. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena.
1977 The effect of planar dipping structure on source and receiver responses for constant ray parameter. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67:1029–1050.

Larner, K. L.
1970 Near-receiver scattering of teleseismic body waves in layered crust-mantle models having irregular interfaces. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

Laster, S. J., and A. F. Linville
1966 Application of multichannel filtering for the separation of dispersive modes of propagation. *Journal of Geophysical Research* 71:1669–1701.

Lee, W. H. K., and J. C. Lahr
1972 HYPO 71: A computer program for determining hypocenter, magnitude, and first motion pattern of local earthquakes. *U.S. Geological Survey*, Open File Report.

Lentini, M., and V. Pereyra
1977 An adaptive finite-difference solver for nonlinear two-point boundary problems with mild boundary layers. *Journal of Numerical Analysis* 14:91–111.

Leontovich, M., and V. Fok
1946 Solution of the problem of propagation of electromagnetic waves along the Earth's surface by the parabolic equation method. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 16:557. (See also Chapter 11 of V. A. Fock, *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*, New York: Pergamon Press, 1965.)

Levenberg, K.
1944 A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics* 2:164–168.

Levinson, N.
1949 The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications* (Appendix B of N. Wiener). New York: John Wiley, pp. 129–148.

Liebfried, G., and H. D. Dietze
1949 Zur theorie der Schraufenversetzung. *Zeitschr. für Geophys.* 126:790–808.

Lippman, B. A.
1953 Note on the theory of gratings. *Journal of the Optical Society of America* 43:408.

Lowes, F. J.
1971 A comment on statistical estimates of amplitude and phase corrections. *Geophysical Journal* 22:227–228.

Luh, P. C.
1973 Free oscillations of the laterally inhomogenous Earth: Quasi-degenerate multiplet coupling. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 32:203–218.

Luh, P. C., and A. M. Dziewonski
1975 Theoretical seismograms for the Colombian earthquake of 1970 July 31. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 43:679–695.

Lysmer, J., and L. A. Drake
1972 A finite element method for seismology. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations* (Methods in Computational Physics, Vol. 11). New York: Academic Press.

McConnell, R. K., Jr., R. N. Gupta, and J. T. Wilson
1966 Compilation of deep crustal structure seismic refraction profiles. *Review of Geophysics* 4:41–100.

Madariaga, R.
1972 Toroidal free oscillations of the laterally heterogeneous Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 27:81–100.

1976 Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:639–666.

1978 The dynamic field of Haskell's rectangular dislocation fault model. *Bulletin of the Seismological Society of America* 68:869–888.

Madariaga, R., and K. Aki

1972 Spectral splitting of toroidal free oscillations due to lateral heterogeneity of the Earth's structure. *Journal of Geophysical Research* 77:4421–4431.

Mallet, R.

1848 On the dynamics of earthquakes. *Irish Academic Transactions* 21:50–106.

Marquardt, D. W.

1963 An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters. *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics* 11:431–441.

Mendiguren, J.

1972 Source mechanism of a deep earthquake from análysis of worldwide observations of free oscillations. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

1973a High resolution spectroscopy of the Earth's free oscillations, knowing the earthquake source mechanism. *Science* 179:179–180.

1973b Identification of free oscillation spectral peaks for 1970 July 31, Colombian deep shock using the excitation criterion. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 33:281–321.

Mikumo, T., and T. Miyatake

1978 Dynamical rupture process on a three-dimensional fault with non-uniform frictions and near-field seismic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 54:417–438.

Milne, J.

1881 Notes on the horizontal and vertical motion of the earthquake of March 8, 1881. *Transactions of the Seismological Society of Japan* 3:129–136.

Mitra, M.

1966 Surface displacement produced by an underground fracture. *Geophysics* 31:204–213.

Molnar, P., K. H. Jacob, and K. McCamy

1973 Implications of Archambeau's earthquake source theory for slip on faults. *Bulletin of the Seismological Society of America* 63:101–104.

Molnar, P., B. E. Tucker, and J. N. Brune

1973 Corner frequencies of P and S waves and models of earthquake sources. *Bulletin of the Seismological Society of America* 63:2091–2104.

Müller, G.

1973 Amplitude studies of core phases. *Journal of Geophysical Research* 78: 3469–3490.

Ness, N. F., J. C. Harrison, and L. B. Slichter

1961 Observations of the free oscillations of the Earth. *Journal of Geophysical Research* 66:621–629.

Niazy, A.
1973 Elastic displacements caused by a propagating crack in an infinite medium: an exact solution. *Bulletin of the Seismological Society of America* 63: 357–379.
1975 An exact solution for a finite, two-dimensional moving dislocation in an elastic half-space with application to the San Fernando earthquake of 1971. *Bulletin of the Seismological Society of America* 65:1797–1826.

Nolet, G.
1975 Higher Rayleigh modes in Western Europe. *Geophysical Research Letters* 2:60.
1976 Higher modes and the determination of upper mantle structure. Thesis, Vening Meinesz Laboratory, Geophysics Department, State University of Utrecht, Utrecht, the Netherlands.

Odegard, M. E., and G. H. Sutton
1972 The Cannikin airborne seismic experiment [abstract] Cordilleran Section Program. *Geological Society of America* p. 213.

Oldham, R. D.
1900 On the propagation of earthquake motion to great distances. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A194:135–174.

Oliver, J., and L. Murphy
1971 WWNSS: seismology's global network for observing stations. *Science* 174: 258.

Oliver, J., M. Dobrin, S. Kaufman, R. Meyer, and R. Phinney
1976 Continuous seismic reflection profiling of the deep basement, Hardeman County, Texas. *Bulletin of the Geological Society of America* 87:1537–1546.

Ottaviani, M.
1971 Elastic-wave propagation in two evenly-welded quarter-spaces. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61:1119–1152.

Pakiser, L. C., and J. S. Steinhart
1964 Explosion seismology in the western hemisphere. *In* H. Odishaw (editor), *Research in Geophysics*. Cambridge: M.I.T. Press.

Papoulis, A.
1965 *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.* New York: McGraw-Hill.

Patton, H.
1977 Source and propagation effects of Rayleigh waves from central Asian earthquakes. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

Pekeris, C. L.
1947 Note on the scattering of radiation in an inhomogeneous medium. *Physical Review* 71:268.
1948 Theory of propagation of explosive sound in shallow water. *Geological Society of America Memoirs* No. 27.

Phinney, R. A.
1964 Structure of the Earth's crust from spectral behavior of long-period body waves. *Journal of Geophysical Research* 69:2997–3017.

Pisarenko, V. F.
1970 Statistical estimates of amplitude and phase corrections. *Geophysical Journal* 20:89–98.

Press, F.
1956 Determination of crustal structure from phase velocity of Rayleigh waves. Part I. Southern California. *Bulletin of the Geological Society of America* 67:1647–1658.
1968 Earth models obtained by Monte Carlo inversion. *Journal of Geophysical Research* 73:5223–5234.
1970 Earth models consistent with geophysical data. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 3:3–22.

Raitt, R. W., G. G. Shor, Jr., T. J. G. Francis, and G. B. Morris
1969 Anisotropy of the Pacific upper mantle. *Journal of Geophysical Research* 74:3095–3109.

Randall, M. J.
1973 Spectral peaks and earthquake source dimensions. *Journal of Geophysical Research* 78:2609–2611.

Rautian, T. C., and V. I. Khalturin
1978 The use of coda for determination of the earthquake spectrum. *Bulletin of the Seismological Society of America* 68:923–948.

Rebeur-Paschwitz, E. von
1889 The earthquake of Tokio, April 18, 1889. *Nature* 40:294–295.

Richards, P. G.
1973 The dynamic field of a growing plane elliptical shear crack. *International Journal of Solids and Structures* 9:843–861.
1976 Dynamic motions near an earthquake fault: A three-dimensional solution. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:1–31.

Richter, C. F.
1958 *Elementary Seismology*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Robinson, E. A.
1957 Predictive decomposition of seismic traces. *Geophysics* 22:767–778.
1963 Mathematical development of discrete filters for the detection of nuclear explosions. *Journal of Geophysical Research* 68:5559–5568.
1966 Multichannel z-transforms and minimum delay. *Geophysics* 31:482–500.

Roller, J. C., and W. H. Jackson
1966 Seismic wave propagation in the upper mantle: Lake Superior, Wisconsin to Central Arizona. *Journal of Geophysical Research* 71:5933–5941.

Sabatier, P. C.
1976 On geophysical inverse problems and constraints. *Journal of Geophysics* 43:115–138.

Sato, R.
1975 Fast computation of theoretical seismograms for an infinite medium. Part I. Rectangular fault. *Journal of Physics of the Earth* 23:323–331.

Sato, T., and T. Hirasawa
1973 Body wave spectra from propagating shear cracks. *Journal of Physics of the Earth* 21:415–431.

Satô, Y.
1955 Analysis of dispersed surface waves. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, Tokyo Univ. 33:33–48.
1958 Attenuation, dispersion and the waveguide of the *G* waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 48:231–251.

Savage, J. C.
1966 Radiation from a realistic model of faulting. *Bulletin of the Seismological Society of America* 56:577–592.
1972 Relation of corner frequency to fault dimensions. *Journal of Geophysical Research* 27:3788–3795.

Scheidegger, A. E., and P. L. Willmore
1957 The use of a least squares method for the interpretation of data from seismic surveys. *Geophysics* 22:9–22.

Schneider, W. A.
1971 Developments in seismic data processing and analysis (1968–1970). *Geophysics* 36:1043–1073.

Schneider, W. A., and M. M. Backus
1968 Dynamic correlation analysis. *Geophysics* 33:105–126.

Schneider, W. A., K. L. Larner, J. P. Burg, and M. M. Backus
1964 A new data-processing technique for the elimination of ghost arrivals on reflection seismograms. *Geophysics* 29:783–805.

Shannon, C. E.
1949 *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press.

Sheriff, R. E.
1968 Glossary of terms used in geophysical exploration. *Geophysics* 33:183–228.
1969 Addendum to "Glossary of terms used in geophysical exploration." *Geophysics* 34:255–270.

Shor, G. G., Jr., and R. W. Raitt
1969 Explosion seismic refraction studies of the crust and upper mantle in the Pacific and Indian Ocean. *In* P. J. Hart (editor), *The Earth's Crust and Upper Mantle*. American Geophysical Union Monograph (Vol. 13).

Slichter, L. B.
1932 The theory of the interpretation of seismic travel time curves in horizontal structures. *Physics* 3:273–295.

Smith, E. G. C.
1976 Scaling the equations of condition to improve conditioning. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:2075–2081.
1978 The statistical properties of least-squares hypocentre estimates—a reappraisal. Manuscript in preparation.

Smith, W. D.
1974 A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems. *Journal of Computational Physics* 15:492–503.

Solomon, S. C., and B. R. Julian
1974 Seismic constraints on ocean-ridge mantle structure: Anomalous fault plane solutions from first motions. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 38:265–285.

Springer, D. L., and R. L. Kinnaman
1971 Seismic source summary for U.S. underground nuclear explosions, 1961–1970. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61:1073–1098.

Starr, A. T.
1928 Slip on a crystal and rupture in a solid due to shear. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 24:489–500.

Steinhart, J. S.
1964 Lake Superior seismic experiment: Shots and travel times. *Journal of Geophysical Research* 69:5335–5352.

Swanger, H. J., and D. M. Boore
1978 Simulation of strong-motion displacements using surface-wave modal superposition. *Bulletin of the Seismological Society of America* 68:907–922.

Sykes, L. R.
1967 Mechanism of earthquakes and nature of faulting on the mid-oceanic ridges. *Journal of Geophysical Research* 72:2131–2153.

Takahashi, T.
1955 Analysis of dispersion curves of Love-waves. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, Tokyo Univ. 33:287–296.

Takahasi, R., and K. Hirano
1941 Seismic vibrations of soft ground. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, Tokyo Univ. 19:534–543.

Toksoz, M. N., J. W. Minear, and B. R. Julian
1971 Temperature field and geophysical effects of a downgoing slab. *Journal of Geophysical Research* 76:1113–1138.

Tsai, Y. B., and K. Aki
1971 Amplitude spectra of surface waves from small earthquakes and underground nuclear explosions. *Journal of Geophysical Research* 76:3440–3452.

Tukey, J. W.
1959 Equalization and pulse shaping techniques applied to the determination of initial sense of Rayleigh waves. *Report on a Panel of Seismic Improvement*, Appendix 9 (L. V. Berkner, Chairman).
1965 Data analysis and the frontiers of geophysics. *Science* 148:1283–1289.

Turner, H. H.
1922 On the arrival of earthquake waves at the antipodes, and the measurement of the focal depth of an earthquake. *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement* 1:1–13.

Wadati, K.
1928 Shallow and deep earthquakes. *Geophysical Magazine* (Tokyo) 1:162–202.

Walsh, J. B.
1965 The effect of cracks on the compressibility of rock. *Journal of Geophysical Research* 70:381–389.

Ware, J. A., and K. Aki
1969 Continuous and discrete inverse scattering problems in a stratified elastic medium. I. Plane waves at normal incidence. *Journal of the Acoustical Society of America* 45:911–921.

Weidner, D. J.
1972 Rayleigh waves from mid-ocean ridge earthquakes: Source and path effects. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.
1974 Rayleigh wave phase velocities in the Atlantic Ocean. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 36:105–139.

Weidner, D. J., and K. Aki
1973 Focal depth and mechanism of mid-ocean ridge earthquakes. *Journal of Geophysical Research* 78:1818–1831.

Wesson, R. L.
1971 Travel time inversion for laterally inhomogeneous crustal velocity models. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61:729–746.

Wiechert, E.
1910 Bestimmung des weges der Erdbebenwellen im Erdinnern. I. Theoretisches. *Phys. Z.* 11:294–304.

Wiener, N.
1949 *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*. New York: John Wiley.

Wiggins, R. A.
1972 The general linear inverse problem: Implication of surface waves and free oscillations for Earth structure. *Review of Geophysics and Space Physics* 10:251–285.

Wiggins, R. A., and E. A. Robinson
1965 Recursive solution to the multichannel filtering problem. *Journal of Geophysical Research* 70:1885–1891.

Wold, H.
1938 *Stationary Time Series*. Stockholm: Almquist and Wiksell.

Yang, J. P., and W. H. K. Lee
1976 Preliminary investigations of computational methods for solving the two-point seismic ray-tracing problem in a heterogeneous and isotropic medium. *U.S. Geological Survey, Open-file Report*, 76–707.

Zienkiewicz, O. C., and Y. K. Cheung
1968 *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. New York: McGraw-Hill.

译 后 记

《定量地震学》的英文版于1980年出版，这部两卷本的专著受到地震学界的重视。为满足广大专业工作者的需要，我们把它翻译成中文。这是第二卷，第十一、十二章由唐美华译，第十三章至第十五章由吴宁远译，全部译稿由邹其嘉整理。

限于译者水平，译文中一定有错误及不妥之处，恳请广大读者批评指正。